

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМИ И ДРОБНО-ИНТЕГРИРУЮЩИМИ ЗВЕНЬЯМИ В SIMULINK

В. В. Бушер, к.т.н., доц.

Одесский национальный политехнический университет

пр. Шевченко, 1, 65044, г.Одесса, Украина

E-mail: victor.v.bousher@mail.ru

Предложен способ исследования систем с дробно-дифференцирующими и дробно-интегрирующими звеньями в среде SIMULINK на основании представления решения уравнений в модифицированной форме Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: дробное интегрирование, дробное дифференцирование, моделирование динамических процессов в SIMULINK.

Введение. При анализе и синтезе некоторых систем может возникнуть необходимость решения дробно-дифференциальных уравнений. В частности, в системах регулирования микроклимата в помещениях изменение температуры воздуха T_{II} может описываться уравнением дробно-апериодического звена [1]:

$$T^{\mu} D^{\mu} T_{II}(t) + T_{II}(t) = \Delta T_H(t), \quad (1)$$

где D^{μ} – оператор дифференцирования порядка μ , T – формальная постоянная времени объекта (помещения), ΔT_H – перегрев в помещении, обусловленный управляемым источником тепла.

Анализ предыдущих исследований. Для оптимизации переходных процессов регулятор температуры помещения также может быть реализован на базе дробного пропорционально-интегрирующего или дробного интегрально-дифференцирующего звеньев [2] с передаточными функциями соответственно:

$$\begin{aligned} H_{PI}^{\mu}(p) &= k_{rp} + \frac{k_{ri}}{p^{\mu}}, \\ H_{ID}^{\mu}(p) &= k_{rd} p^{1-\mu} + \frac{k_{ri}}{p^{\mu}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Динамические и статические свойства систем с такими объектами существенно отличаются от свойств объектов, описываемых дифференциальными уравнениями целочисленного порядка. Исследование таких систем удобно было бы проводить в среде SIMULINK, однако моделей для расчета решений дробно-дифференциальных уравнений в этой среде нет [3].

Цель работы. Создание моделей объектов (1) и (2) для исследования динамических и статических процессов в среде SIMULINK.

Материал и результаты исследования. Решение дифференциального уравнения (1) может быть найдено путем дробного интегрирования, а дробная производная также может быть вычислена, как производная первого порядка от дробного интеграла. Поэтому для реализации моделей объектов (1) и (2) необходимо найти способ численного дробного интегрирования сигнала произвольной формы $f(t)$.

Воспользуемся описанием дробного интеграла в форме Римана-Лиувилля и заменим процедуру интегрирования суммированием с шагом Δt :

$$\begin{aligned} I^{\mu} f_i &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{t_i} \frac{f(t)}{(t_i - t)^{1-\mu}} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=1}^i \frac{f(j\Delta t)}{(t_i - j\Delta t)^{1-\mu}} \Delta t \end{aligned}$$

Из-за наличия знаменателя подынтегральной функции, который при $t = t_i$ становится равным 0, последним слагаемым приходится пренебрегать (что обычно для метода конечных приращений). Однако погрешность при этом становится весьма ощутимой и зависящей от знака и характера входного сигнала. Требуется принимать специальные меры для коррекции результатов расчета. Также при дробном интегрировании становится невозможным применение численных методов с переменным шагом и методов высокого порядка точности [3].

Решим задачу следующим образом. Введем в знаменатель смещение C_j , зависящее от номера шага расчета j . Тогда получим:

$$I^{\mu} f_i = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{j=1}^i \frac{f_{i-j+1} \Delta t^{\mu}}{(j - C_j)^{1-\mu}} = \sum_{j=1}^i k_j f_{i-j+1}. \quad (3)$$

Для расчета значений C_j воспользуемся известной реакцией дробно-интегрирующего звена на единичный скачок, описываемой выражением

$$I^{\mu}(1(t)) = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)} t^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(1+\mu)} (j\Delta t)^{\mu}. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), для $\mu \in]0; 1[$ получим рекуррентную формулу:

$$C_j^{\mu} = j - \frac{1}{\left(\frac{j^{\mu}}{\mu} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{(k - C_k^{\mu})^{1-\mu}} \right)^{\frac{1}{1-\mu}}}. \quad (5)$$

После упрощений получим:

$$k_j^{\mu} = \frac{\Delta t^{\mu}}{\Gamma(1+\mu)} (j^{\mu} - (j-1)^{\mu}). \quad (6)$$

Необходимое для расчетов значение функции $\Gamma(\mu)$ может быть получено приближенно, например, по следующей формуле:

$$\Gamma(\mu) \approx \exp \left(\frac{(\mu+0.5)\ln(\mu+5.5) - (\mu+5.5) + \ln \left(1 + \frac{76.18}{\mu+1} - \frac{86.5}{\mu+2} + \frac{24.01}{\mu+3} - \frac{1.232}{\mu+4} \right)}{0.399\mu} \right). \quad (7)$$

На основании формул (3), (6) и (7) уже может быть реализовано вычисление дробного интеграла в SIMULINK.

Выполнив анализ при подаче на вход дробно-интегрирующего звена линейно-возрастающего сигнала, можно получить рекуррентную формулу расчета коэффициентов

$$k_j^\mu = \frac{\Delta t^\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{j^{\mu+1} - (j-1)^{\mu+1}}{\mu(\mu+1)} - \sum_{n=1}^{j-1} k_n^\mu, \quad (8)$$

обеспечивающую в 2 раза большую точность расчета по сравнению с (6). Выражения для расчета коэффициентов (6) и (8) формально обеспечивают расчет дробного интеграла с точностью порядка $1+\mu$ и $2+\mu$ соответственно.

Особенностью операции дробного интегрирования является возникновение ошибки при ограничении количества точек расчета. Исходя из требуемой точности δ , количество точек n_p может быть определено по следующей формуле:

$$n_p = \left(\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\mu)\delta\Delta t^\mu} \right)^{1/\mu}. \quad (9)$$

При выполнении расчета с постоянным шагом Δt (Fixed Step Discrete) в течение заданного интервала времени t_p при нулевых начальных условиях дробный интеграл функции f в i -й момент времени представляет собой результат произведения двух одномерных векторов из $n_p = \frac{t_p}{\Delta t}$ элементов:

заранее подготовленного в m-файле вектора \bar{k} и заполняемого по мере вычисления \bar{f} . Для реализации такой процедуры использованы стандартные блоки SIMULINK, обеспечивающие оптимальное по быстродействию решение задачи: *Memory* с вектором начальных условий \bar{z} , *Selector* с размером входного массива n_p и индексами $[1:n_p-1]$, а также *Matrix concatenate* и *Dot product* с двумя векторными входами (рис. 1).

Также с учетом полученных формул составлены модели для расчета отдельных слагаемых дробного интеграла (рис.2). В подсистемы включены блоки вычисления коэффициентов, задержки на один шаг расчета (Unit Delay), вычисления отдельного слагаемого интеграла и суммирования его с предыдущими слагаемыми. Также на 1 увеличивается номер,

передаваемый в следующее звено. Мультиплексоры и демультиплексоры шин облегчают создание связей между подсистемами.

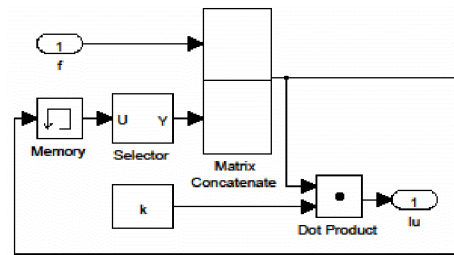


Рисунок 1 – Модель дробно-интегрирующего звена

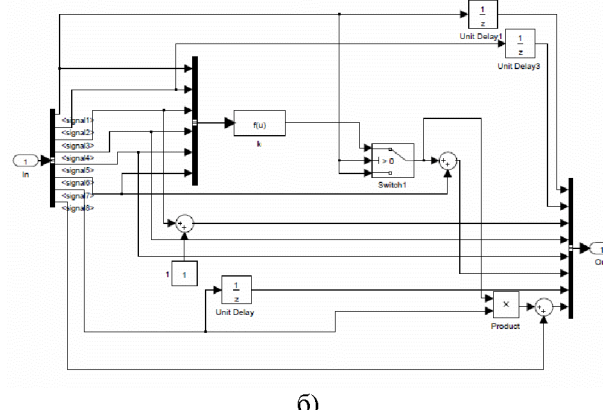
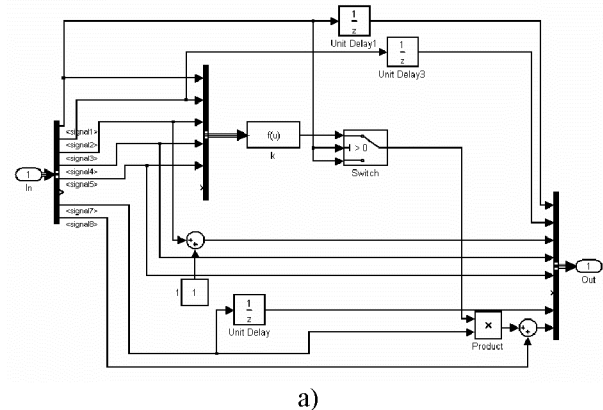


Рисунок 2 – Подсистемы для расчета j-го слагаемого по формуле (6) – (а) и по формуле (8) – (б)

Подсистемы (рис. 2) последовательно соединяются в цепь из необходимого количества звеньев n_p (рис. 3) и в конечном итоге объединяются в подсистему, вычисляющую дробный интеграл входного сигнала.

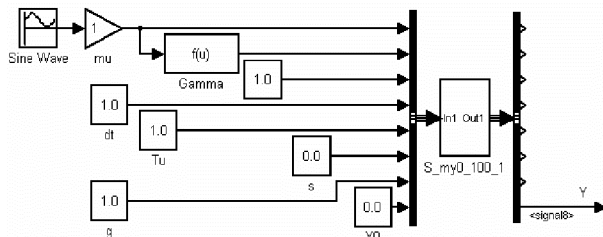


Рисунок 3 – Система для расчета дробного интеграла

Скорость вычисления и компиляции модели (рис. 3) значительно меньше модели (рис. 1), а решения при постоянном значении μ совпадают. Однако данная модель позволяет также реализовать в среде SIMULINK решение уравнений с переменным порядком $\mu(t)$.

На рис.4 приведена модель замкнутой системы, состоящей из дробного пропорционально-интегрирующего регулятора и дробно-аперриодического звена, собранной по приведенной выше методике, а на рис. 5,а – графики переходных процессов в регуляторе и объекте управления. Также на рис. 5,б приведены графики переходных про-

цессов при плавном изменении порядка интегрирования по косинусоидальному (1) и синусоидальному (2) законам. Полученные результаты весьма похожи на изменение напряжения в диффузионном слое суперконденсаторов в режиме заряда и разряда постоянным током, вычисленное в ходе обработки экспериментальных данных. Физического обоснования такого поведения суперконденсаторов пока не существует. Но справедливо будет утверждать, что предложенная модель может использоваться для качественной оценки поведения объектов с такими необычными свойствами.

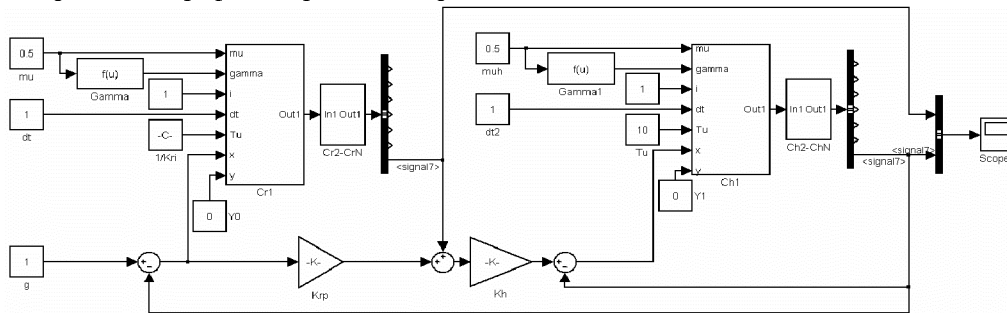


Рисунок 4 – Модель системы, состоящей из регулятора и объекта управления

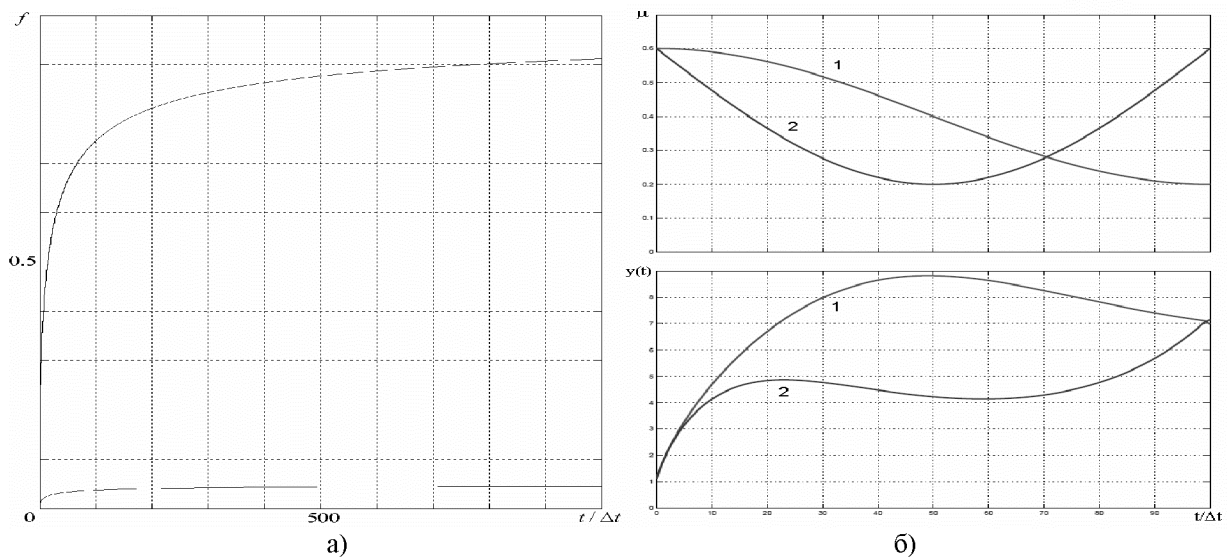


Рисунок 5 – Графики переходных процессов в замкнутой системе (а) и в системе с переменным μ (б)

Выводы. Таким образом, разработаны модели, позволяющие исследовать свойства систем, включающих дробно-интегрирующие звенья с произвольным, в том числе изменяющимся во времени порядком интегрирования $\mu \in [0,1]$ в среде SIMULINK.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушер В.В. Идентификация элементов климатических систем дифференциальными уравнениями дробного порядка // Электромашинобуд. та електрообладн.– К.:Техніка. – 2010. – Вип. 75. – С.68–70.

2. Бушер В.В. Системы управления климатическими установками с дробными интегрально-дифференцирующими регуляторами // Вісник Нац. техн. ун-ту «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 28. – С. 172–173.

3. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.

Стаття надійшла 13.03.2011 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф.
Чорним О.П

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ З ДРОБОВИМИ ДИФЕРЕНЦІЙНИМИ ТА ДРОБОВИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ЛАНКАМИ У SIMULINK

В. В. Бушер, к.т.н., доц.

Одеський національний політехнічний університет

пр.Шевченко, 1, 65044, з.Одеса, Україна

E-mail: victor.v.bousher@mail.ru

Запропоновано метод дослідження систем з дробово-інтегральними та дробово-диференційними ланками у SIMULINK на підставі опису рішення рівнянь модифікованою формою Рімана-Ліувіля.

Ключові слова: дробове інтегрування, дробове диференціювання, моделювання динамічних процесів, SIMULINK.

THE MODEL OF SYSTEM WITH FRACTIONAL INTEGRAL AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL IN SIMULINK

V. Bousher, Cand. of Sc. (Tech.), Assoc. Prof.

Odessa national Politech University

pr.Shevchenko, 1, 65044, Odessa, Ukraine

E-mail: victor.v.bousher@mail.ru

The model based on Riemann-Liouville equation of fractional integral for MATLAB/SIMULINK is proposed. Research of dynamic and static modes of systems with fractional differential and integral is possible.

Key words: fractional differential, fractional integral, model, SIMULINK.