УДК 62–83: 681.513.5

СИНТЕЗ ФУНКЦІОНАЛІВ ЯКОСТІ ДЛЯ ДРОБНОВИМІРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

С. А. Сергієнко
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
Р. С. Волянський
Дніпродзержинський державний технічний університет
вул. Дніпробудівська, 2, м. Дніпродзержинськ, 51918, Україна. E-mail: voliansky@ua.fm

Показано можливість синтезу алгоритмів оптимального керування для систем розривного керування з дробновимірними похідними та наведено спосіб визначення функціоналів якості, мінімізація яких здійснюється розривними керуваннями в ковзному режимі й гарантує граничні динамічні характеристики систем, що синтезуються. Доведено необхідність урахування передісторії системи при розрахунку коефіцієнтів функціоналу якості (функції Ляпунова) на кожному кроці керування. Виконано аналіз значення обсягу вибірки та показника ступеня похідної на швидкодію та стійкість системи.

Ключові слова: система оптимального керування, розривне керування, дробновимірні похідні, функціонал якості, гіперплощина перемикань, функція Ляпунова.

СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛОВ КАЧЕСТВА ДЛЯ ДРОБНОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

С. А. Сергиенко
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
Р. С. Волянский
Днепродзержинский государственный технический университет
ул. Днепростроевская, 2, г. Днепродзержинск, 51918, Украина. E-mail: voliansky@ua.fm

Показана возможность синтеза алгоритмов оптимального управления для систем разрывного управления с дробномерными производными и приведен способ определения функционалов качества, минимизация которых осуществляется разрывными управлениями в скользящем режиме и гарантирует предельные динамические характеристики синтезируемых систем. Доказана необходимость учета предыстории системы при расчете коэффициентов функционала качества (функции Ляпунова) на каждом шаге управления. Выполнен анализ значения объема выборки и показателя степени производной на быстродействие и устойчивость системы.

Ключевые слова: система оптимального управления, разрывное управление, дробномерные производные, функционал качества, гиперплоскость переключения, функция Ляпунова.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. На даний час стрімко розвивається тенденція застосування дробового числення в різних галузях науки, техніки, природознавства, економіки та інших сферах людської діяльності, що використовують математичні методи й засоби комп'ютерного моделювання.

Застосування дробового числення в автоматичному керуванні можна поділити на дві групи [1, 2]. Першу утворюють методи математичного й комп'ютерного моделювання систем дробового порядку, в яких виявляються властивості дробової динаміки (зазвичай це пов'язано з наявністю сигналів зі ступеневою залежністю в часовій і (або) частотній областях). До другої належать методи використання дробового числення для синтезу систем керування динамічними системами як цілого, так і дробового порядків, зокрема, синтезу контролерів нецілого порядку.

Це зумовлено сучасним рівнем мікропроцесорної техніки, що дозволяє реалізовувати складні алгоритми керування різноманітними технологічними об'єктами без істотного здорожчання систем управління.

Доведено, що комплексне вирішення проблеми забезпечення низької чутливості до параметричних і координатних збурень, а також підвищення динамічної та статичної точності для високоточних електроприводів постійного й змінного струму може бути отримано в класі систем, стійких за необмеженого збільшення коефіцієнта підсилення, що працюють у ковзному режимі [3, 4]. Вибір оптимізуючого функціонала зумовлює вигляд і характер оптимальної керуючої дії й дозволяє здійснити синтез систем з наперед заданими властивостями, яких ті набувають завдяки розривним керуванням у ковзному режимі. Проте у відомих літературних джерелах відсутня інформація про способи визначення функціоналів якості, мінімізація яких здійснюється розривними керуваннями в ковзному режимі й гарантує граничні динамічні характеристики систем, що синтезуються.

Метою даної роботи є визначення функціоналів якості для систем розривного керування з дробновимірною лінією рівноваги.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. У більшості випадків електромеханічну систему з керованим перетворювачем можна описати системою диференційних рівнянь третього порядку (n=3), яка у загальному випадку має вигляд

$$\begin{aligned} p\eta_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + a_{13}\eta_3; \\ p\eta_2 &= a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{23}\eta_3; \\ p\eta_3 &= a_{31}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + m_3U, \end{aligned} \qquad (1)$$

де η_i – координати збуреного руху об’єкта керування, a_{ij} – сталі коефіцієнти.

Керування об'єктом (1) може бути надано у вигляді [4]

$$U = -sign\left[V_{13}\eta_1 + V_{23}p\eta_1 + V_{33}p^2\eta_1 \right], \qquad (2)$$

де V – коефіцієнти функції Ляпунова, що забезпечують асимптотичну стійкість синтезованій системі керування.

Введемо показник ступеня диференціювання, тоді алгоритм керування (2) запишемо як

$$U = -sign\left[V_{13}\eta_1 + V_{23}p^{\alpha}\eta_1 + V_{33}p^{2\alpha}\eta_1 \right], \qquad (3)$$

де $p^{\alpha}\eta_1$ та $p^{2\alpha}\eta_1$ – дробні похідні.

Для розрахунку похідних дробових порядків будемо використовувати формулу Грюнвальда-Лєтнікова, відповідно до якої

$$p^{\alpha}\eta_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} \eta_1\left(t - \frac{i}{N}T\right); \qquad (4)$$

$$p^{2\alpha}\eta_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \binom{2\alpha}{i} \eta_1\left(t - \frac{i}{N}T\right), \quad (5)$$

де N – обсяг вибірки; T – інтервал дискретизації сигналу; h – крок вибірки;

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha-i+1)};$$

$$\binom{2\alpha}{i} = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(2\alpha-i+1)};$$

$\Gamma(...)$ – гамма-функція (Г-функція) відповідного аргументу.

Пріоритетне використання формул (4), (5) пояснюється їх порівняльною простотою й достатньо добрими принциповими можливостями реалізації на сучасній цифровій техніці.

Для зручності подальшого використання позначимо

$$\eta_1[j] = \eta_1(t); \quad \eta_1[j-i] = \eta_1\left(t - \frac{i}{N}T\right). \qquad (6)$$

Неважко побачити, що підстановкою похідних (4) та (5) у керування (3) та перехід на основі принципу «короткої пам'яті» до сум з кінцевою кількістю складових можна отримати наступне керування:

$$U = -sign\left[V'_{13}\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i \left[\frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{\alpha}}\binom{2\alpha}{i} \right] \eta_1[j-i] \right], \qquad (7)$$

де $V'_{13} = V_{13} + \dfrac{V_{33}}{h^{\alpha}} + \dfrac{V_{23}}{h^{\alpha}}$.

Через те, що аналітичне конструювання регуляторів (АКР) розроблене тільки для лінійних і релейних систем з ковзними режимами першого порядку, завдання визначення керування з дробновимірною гіперплощиною перемикань супроводжується відшуканням інтегранта функціонала, що мінімізується.

Будемо шукати мету керування у вигляді

$$I = \int_0^{\infty} \left[F(\eta) + G(U) \right] dt . \qquad (8)$$

Використання функціонала (8) та керування (3) пов'язане з визначенням та застосуванням функції Ляпунова, яка, відповідно до критерію Сильвестра, є квадратичною формою, що залежить від координат збуреного руху:

$$V = V(\eta). \qquad (9)$$

Визначити функцію Ляпунова можна, скориставшись одним з результатів розв'язання задачі АКР:

$$U = -K\frac{\partial V}{\partial \hat{\eta}_n}. \qquad (10)$$

Цікавим є той факт, що залежність (10) дозволяє розв'язувати не лише пряму задачу знаходження оптимального керування, але й зворотню – визначення функції Ляпунова за відомим керуванням

$$V = -\frac{1}{K}\int_0^{\infty} U d\hat{\eta}_n . \qquad (11)$$

Проте вираз (11) не дозволяє повною мірою відновити квадратичну форму, в якій відшукується функція Ляпунова, тому рівняння (11) має бути доповнене сумою $\sum_{i,k=1}^{n-1} V_{ik}\eta_i\eta_k$:

$$V = -\frac{1}{K}\int_0^{\infty} U d\hat{\eta}_n + \sum_{i,k=1}^{n-1} V_{ik}\eta_i\eta_k . \qquad (12)$$

Наведені вище узагальнення щодо функції Ляпунова отримано на основі розгляду миттєвих значень траєкторії руху та мети керування.

Відповідно до виразу (7) клас квадратичних функцій, в яких визначається функція Ляпунова, повинен бути розширений на квадратичні функції з передісторією.

У такому випадку функцію Ляпунова для об'єкта керування (1) будемо шукати у вигляді

$$V = \sum_{i,k=1}^{2} V_{ik}\eta_i\eta_k + \frac{1}{K}\int_0^{\infty}\left[V'_{13}\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{2\alpha}}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1[j-i]\right] d\hat{\eta}_n . \qquad (13)$$

Беручи до уваги необхідність забезпечення квадратичності функції (13) та враховуючи, що останнім доданком в алгоритмі керування є $p^{2\alpha}\eta_1$, як $\hat{\eta}_n$ приймемо $p^{2\alpha}\eta_1$:

$$\hat{\eta}_n = p^{2\alpha}\eta_1 . \qquad (14)$$

Тоді, з урахуванням похідної (5) та позначень (6), функція Ляпунова (13) матиме вигляд:

$$V = \sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}\eta_i\eta_j + .\frac{1}{K}\int_0^{\infty}\left[V'_{13}\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{2\alpha}}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1[j-i]\right] \times d\frac{1}{h^{2\alpha}}\left(\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\binom{2\alpha}{i}\eta_1[j-i]\right). \qquad (15)$$

Інтегрування другого доданку функції (15) дає наступний результат:

$$\begin{aligned} V = &\sum_{i,k=1}^{2} V_{ik}\eta_i[j]\eta_k[j] + \frac{1}{h^{3\alpha}K}V'_{13}\eta_1^2[j] + \\ &+\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{4\alpha}K}\binom{\alpha}{i}+\frac{V_{33}}{h^{4\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1[j]\eta_1[j-i] + \\ &+\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\frac{V'_{13}}{h^{2\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\eta_1[j-i]\eta_1[j] + \\ &+\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\binom{2\alpha}{i}\times \\ &\times\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{3\alpha}K}\binom{\alpha}{i}+\frac{V_{33}}{h^{3\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1^2[j-i]. \end{aligned} \qquad (16)$$

В отриманому виразі можна виділити три складові:

– енергію, яку має об'єкт на даний, j-ий, момент часу:

$$\begin{aligned} V[j] = &V_{11}\eta_1^2[j] + 2V_{12}\eta_1[j]\eta_2[j] + \\ &+V_{22}\eta_2^2[j] + \frac{1}{h^{3\alpha}K}V'_{13}\eta_1^2[j]; \end{aligned} \qquad (17)$$

– енергію, яку мав об'єкт в (i-j)-ий момент часу:

$$\begin{aligned} V[i-j] = &\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\binom{2\alpha}{i}\times \\ &\times\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{3\alpha}K}\binom{\alpha}{i}+\frac{V_{33}}{h^{3\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1^2[j-i]; \end{aligned} \qquad (18)$$

– енергію, яка була отримана в (i-j)-ий момент часу та передалася в j-ий момент часу:

$$\begin{aligned} V[j(i-j)] = &\left[\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{4\alpha}K}\binom{\alpha}{i}+\frac{V_{33}}{h^{4\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right]+\right. \\ &\left.+\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\frac{V'_{13}}{h^{2\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1[j-i]\eta_1[j]. \end{aligned} \qquad (19)$$

Узагальнюючи отримані залежності, наведено знайдену функцію Ляпунова наступним чином

$$\begin{aligned} V = &V_{11}\eta_1^2[j] + 2V_{12}\eta_1[j]\eta_2[j] + \\ &+V_{22}\eta_2^2[j] + \sum_{i=1}^{N-1}V_{11}^{j(j-i)}\eta_1[j]\eta_1[j-i] + \\ &+\sum_{i=1}^{N-1}V_{11}^{(j-i)}\eta_1^2[j-i] \end{aligned} \qquad (20)$$

і доведемо, що отримана залежність дійсно є функцією Ляпунова.

Для простоти аналізу побудуємо графік функції

$$\begin{aligned} V = &V_{11}\eta_1^2[j] + \sum_{i=1}^{N-1}V_{11}^{j(j-i)}\eta_1[j]\eta_1[j-i] + \\ &+\sum_{i=1}^{N-1}V_{11}^{(j-i)}\eta_1^2[j-i] \end{aligned} \qquad (21)$$

при $N=\infty$. Відповідний графік показано на рис. 1.

Аналіз побудованого графіка підтверджує, що функція (21) є функцією Ляпунова, тому можна сказати, що функції, які належать до класу квадратичних функцій (21), є функціями Ляпунова з передісторією.

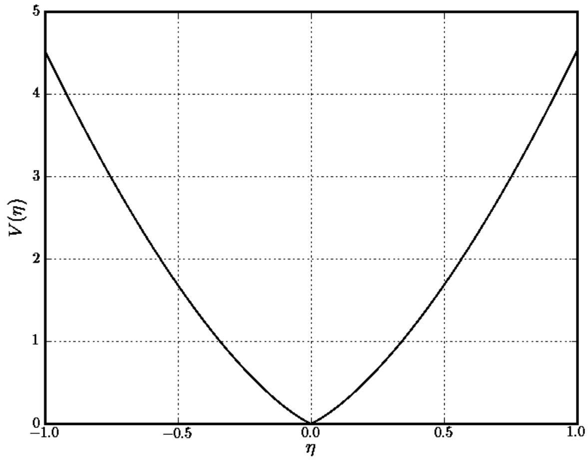

Рисунок1 – Графік функції Ляпунова з передісторією

На рис. 2 наведено залежності функції Ляпунова (21) з різними обсягами вибірки (10, 25, 50) та вибіркою нескінченого обсягу. Аналіз отриманих залежностей вказує на те, що при підвищенні обсягу вибірки функція Ляпунова наближається до еталонної як функції з нескінченим обсягом вибірки.

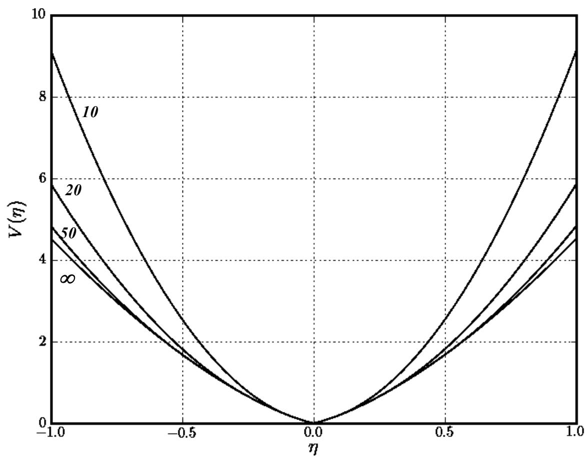

Рисунок 2 – Функції Ляпунова з передісторією для різних значень обсягу вибірки

Необхідно відмітити розбіжність між системами з кінцевим і нескінченим обсягами вибірки. При кінцевому обсязі вибірки апроксимоване значення дробної похідної буде вище за точне значення дробної похідної і таким чином створюються умови для розсіювання більш великих значень надлишкової енергії, що запасається на траєкторіях збуреного руху.

Рис. 3 ілюструє вплив ступеня оператора дробного диференціювання (0,25; 0,5; 0,75). Аналіз графіку вказує на те, що зі збільшенням показника ступеня оператора диференціювання збільшується значення енергії, яка може розсіюватись системою без втрати стійкості.

Значення коефіцієнтів функції Ляпунова будемо визначати за умови збереження енергії, яка запасена на траєкторіях вільного збуреного руху.

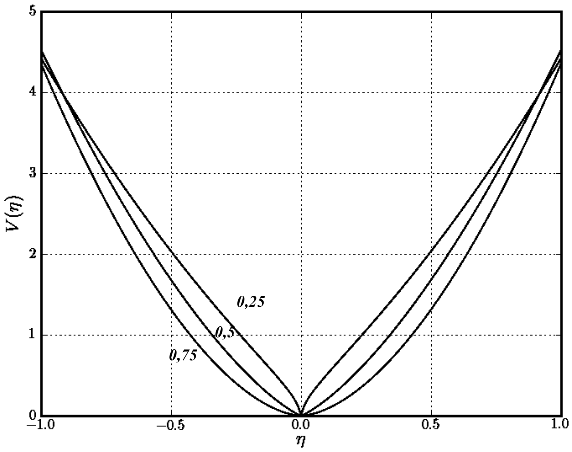

Рисунок – 3 Графік функції Ляпунова для різних значень показника оператора диференціювання

Математично цю умову можна зобразити з урахуванням того, що функція Ляпунова є складною функцією багатьох змінних:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}p\eta_i = 0\,. \qquad (22)$$

Такий підхід визначення коефіцієнтів відповідає розглянутому в [2] й дозволяє знайти коефіцієнти на кожний j-тий момент часу. Значення коефіцієнтів функції Ляпунова при складових, що визначають передісторію системи, визначаються значеннями коефіцієнтів функції Ляпунова для поточних значень енергії шагом дискретизації та коефіцієнтом підсилення регулятора:

$$V_{11}^{j(j-i)} = \frac{V_{23}}{h^{4\alpha}K}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{4\alpha}K}\binom{2\alpha}{i} + \frac{V'_{13}}{h^{2\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}; \qquad (23)$$

$$V_{11}^{(j-i)} = (-1)^i\binom{2\alpha}{i}\sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{3\alpha}K}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{3\alpha}K}\binom{2\alpha}{i}\right].$$

Для знаходження мети керування, скориставшись методом динамічного програмування, складемо основне функціональне рівняння Беллмана:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}p\eta_i + F(\eta) + G(U) = 0\,. \qquad (24)$$

З урахуванням умови (22) запишемо рівняння (23) наступним чином:

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\eta}_n}m_3U + F(\eta) + G(U) = 0\,. \qquad (25)$$

Якщо прийняти

$$G(U) = cU^2\,, \qquad (26)$$

то диференціювання рівняння (25) за керуванням U дає наступну залежність:

$$U = -\frac{m_3}{2c}\frac{\partial V}{\partial \hat{\eta}_n}\,. \qquad (27)$$

Порівняння виразів (27) та (10) дозволяє зробити висновок, що складова $F(\eta)$ визначається як

$$F(\eta) = \left(\frac{1}{K} - \frac{m_3}{2c}\right)\Bigg[V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{33}}{h^{\alpha}}\binom{2\alpha}{i}\right]\eta_1[j-i]\Bigg]^2. \qquad (28)$$

Підінтегральний вираз функціоналу може бути приведений до вигляду

$$F(\eta) = K'\left[V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i V'_{11}\,\eta_1[j-i]\right]^2, \qquad (29)$$

де

$$V'_{11} = \frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{\alpha}{i} + \frac{V_{23}}{h^{\alpha}}\binom{2\alpha}{i}. \qquad (30)$$

Поєднання виразів (23) та (28) дозволяє записати наступний вираз для функціонала якості:

$$I = K'\int_0^{\infty}\left(\left[V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i V'_{11}\,\eta_1[j-i]\right]^2 + cU^2\right)dt. \qquad (31)$$

Порівняння функціонала (31) з аналогічними, що наведено в [4], вказує на їх ідентичність, тому функціонал (31) можна використовувати під час математичного опису мети керування, яка мінімізується лінійними керуваннями.

Враховуючи те, що для систем розривного керування інтегрантом функціонала якості є повна похідна функції Ляпунова, що взята зі зворотним знаком, мету керування, яка мінімізується алгоритмами релейного керування першого порядку, можна навести у вигляді

$$I = K'\int_0^{\infty}\left|V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i V'_{11}\,\eta_1[j-i]\right|dt\,. \qquad (32)$$

Перша складова функціоналу (32) є аналогічною до наведеної в [4] і гарантує, що оптимізації динамічної системи будуть здійснюватись миттєвими значеннями розривного керування. Друга складова враховує попередній рух системи та накоплену під час нього надлишкову енергію, дозволяючи синтезувати розривні керування із дрібновимірними ковзними режимами першого порядку.

Аналогічно, шляхом порівнянь отриманого підінтегрального виразу (29) та наведеного в [5], можна знайти функціонал якості

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\left[\sqrt{K'\left|V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i V'_{11}\,\eta_1[j-i]\right|^3} + c|U|^3\right]dt, \qquad (33)$$

мінімізація якого буде здійснюватись оптимальними керуваннями з дрібновимірними ковзними режимами другого порядку

$$U = -sqrt\left(V'_{13}\,\eta_1[j] + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i V'_{11}\,\eta_1[j-i]\right). \qquad (34)$$

ВИСНОВКИ. Урахування передісторії системи при розрахунку функції Ляпунова на кожному кроці керування та використання основного функціонального рівняння Беллмана дозволяє будувати функціонали якості, які мінімізуються оптимальним керуванням дробномірних порядків. Ці функціонали, аналогічно відомим функціоналам, що використовуються при оптимізації систем керування, містять складові, які враховують розсіяння надлишкової енергії в поточний момент часу, але до того ж враховують її попередні ($N-1$) значення.

Таким чином, шляхом відповідного визначення вагових коефіцієнтів фукціонала якості та оптимального керування розсіяння надлишкової енергії в системі здійснюється за дробномірними диференціальними законами, які, завдяки вибору відповідного значення обсягу виборки N та показника α, дозволяють забезпечити задану швидкодію системи без втрати нею стійкості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – К.: НАН Украины, 2008. – 256 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
3. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967. – 424 с.
4. Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.
5. Волянский Р.С., Садовой А.В. Синтез оптимальной системы управления с иррациональной активационной функцией // Вестник НТУ «ХПИ» «Проблемы автоматизированного электропривода» (Теория и практика). – 2010. – Вып. 28. – С. 49–51.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH NONLINEAR FUNCTIONS ACTIVATION

S. Serhiyenko
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
R. Volianskyi
Dniprodzerzhinsk State Technical University
vul. Dniprobudivska, 2, Dniprodzerzhinsk, 51918, Ukraine. E-mail: voliansky@ua.fm

The possibility of synthesis of optimal control algorithms for systems with discontinuous control fractal derivatives and provides a method of determining functional quality, minimization of which the discontinuous control in the sliding mode and ensures the dynamic limit of characteristic of the synthesized systems. The necessity of taking into account the prehistory of the system when calculating the coefficients of the quality functional (Lyapunov function) at each step of management, the analysis of sample size and the value of the exponent of the derivative on the performance and stability of the system.

Key words: optimal control, burst control, fractal derivatives, functional quality, switching hyperplane, the Lyapunov function.

REFERENCES

1. Vasilyev V.V., Simak L.A. *Fractional calculus and approximation methods in the modeling of dynamic systems.* – K.: Ukraine National Academy of Sciences, 2008. – 256 p. [in Russian]
2. Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*. – M.: Fizmatlit, 2003. – 272 p. [in Russian]
3. Meerov M.V. *Synthesis of structures of automatic control systems of high accuracy.* – M.: Nauka, 1967. – 424 p. [in Russian]
4. Sadovoy A.V., Sukhinin B.V., Sokhina V.U. *Systems optimal control precision actuators.* – K.: ISIMO, 1996. – 298 p. [in Russian]
5. Volyansky R.S., Sadovoy A.V. Synthesis of the optimum control system with an irrational activation function // *Bulletin of NTU "KPI" "Problems of automated electric" (Theory and Practice)*. – 2010. – Iss. 28. – PP. 49–51. [in Russian]

Стаття надійшла 11.05.2012.
Рекомендовано до друку
к.т.н., доц. Кореньковою Т.В.