

УДК 255:29.1

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**А. Л. Юдина, А. П. Черный**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: iyusa@mail.ru

**Бердай Абдельмажид**

ENSEM Университет Хассан II Аин Шок

PO Box 8118, Оасис, Касабланка, Марокко. E-mail: a.berdai@gmail.com

Для статистической оценки силы линейной связи переменных состояния электромеханической системы использован частотный аналог коэффициента корреляции двух случайных процессов – функция когерентности. Анализ рассчитанных значений функции когерентности с применением сглаженных корреляционных функций и усреднения по ансамблю реализаций процессов позволил сделать вывод о целесообразности использования временного окна, ограниченного четвертью периода входного напряжения, для получения значимых различий в работе линейной, близкой к линейной и нелинейной систем.

**Ключевые слова:** электромеханическая система, линейные и нелинейные свойства, функция когерентности.

**СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ЛІНІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ  
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

**А. Л. Юдіна, О. П. Чорний**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: iyusa@mail.ru

**Бердай Абдельмажид**

ENSEM Університет Хассан II Аін Шок

PO Box 8118, Оасіс, Касабланка, Марокко. E-mail: a.berdai@gmail.com

Для статистичної оцінки сили лінійного зв'язку змінних стану електромеханічної системи використаний частотний аналог коефіцієнту кореляції двох випадкових процесів – функція когерентності. Аналіз розрахованих значень функції когерентності із застосуванням згладжених кореляційних функцій і усереднювання за ансамблем реалізацій процесів дозволив зробити про доцільність використання часового вікна, що обмежене чвертю періоду входної напруги, для отримання значущих відмінностей у роботі лінійної, близької до лінійної та нелінійної систем.

**Ключові слова:** електромеханічна система, лінійні та нелінійні властивості, функція когерентності.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** В задачах диагностики электрических двигателей (ЭД) электромеханических систем (ЭМС) важную роль играет оценка изменения их состояния в условиях неполных или отсутствующих данных о внутренней структуре и параметрах. В этом случае наряду с проведением структурной и параметрической идентификации [1] возможно применение статистических методов теории случайных процессов (СП) для оценки изменения состояния ЭД по значениям входных и выходных сигналов.

Из теории математической статистики [2] известно, что статистической оценкой тесноты связи двух случайных величин  $X$  и  $Y$  является коэффициент корреляции ( $K_K$ ), принимающий свое максимальное значение, равное единице, при наличии наиболее сильной зависимости случайных величин  $X$  и  $Y$ , а именно, линейной зависимости  $Y = f(X)$ . Уменьшение коэффициента корреляции свидетельствует об ослаблении связи случайных величин и появлении нелинейных составляющих в функции зависимости  $Y = f(X)$ . Данное свойство  $K_K$  может быть использовано при оценке изменений внутреннего состояния ЭД ЭМС.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Рассмотрим ЭМС, на вход которой поступает входной сигнал напряжения  $u(t)$ , а на выходе получен сигнал тока  $i(t)$ . Измерения проводятся в течение

времени  $\Delta T$  с периодичностью  $T$ . Предполагая, что изменение внутреннего состояния ЭД происходит плавно, без резких изменений, можно считать сигналы  $u(t)$  и  $i(t)$  стационарными процессами в течение конечного времени измерений  $\Delta T$ , хотя в общем случае при  $\Delta T \rightarrow \infty$  с учетом внутренних изменений в ЭД они таковыми не являются.

Для случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  также вводится понятие  $K_K$  [2]: нормированная взаимная ковариационная функция (коэффициент корреляции двух процессов) характеризует степень линейной зависимости между случайными процессами при данном сдвиге  $\tau$  одного процесса по отношению ко второму и определяется выражением:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y},$$

где  $K_{xy}(\tau)$  – функция взаимной ковариации;  $\sigma_x, \sigma_y$  – среднеквадратическое отклонение (СКО) случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

В общем случае для произвольных фиксированных моментов времени  $t_1 = t$  и  $t_2 = t + \tau$ :

$$K_{xy}(t, t + \tau) = M((X(t) - m_x(t))(Y(t + \tau) - m_y(t + \tau))),$$

где  $m_x(t), m_y(t)$  – математические ожидания процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  в момент  $t$ .

Для идеальных линейных систем  $\rho_{xy}(\tau)$  равен

единице для всех интервалов времени  $\tau$ . Но, поскольку абсолютно идеальных систем не существует, линейной можно считать зависимость, для которой  $K_K > 0,9$ . Для оценки изменения состояния ЭД важен факт уменьшения  $K_K$  при его измерении с некоторой периодичностью  $\Delta T$ , а не его абсолютное значение в текущий момент времени.

Наряду с оценкой силы линейной связи двух СП с помощью  $K_K$   $\rho_{xy}(\tau)$  во временной области существует его аналог в частотной – функция когерентности  $\gamma_{xy}^2(f)$ . Функция когерентности (ФК) отражает степень линейной взаимосвязи гармонических компонент рассматриваемых процессов. Чем ближе функция когерентности к единице на данной частоте  $f$ , тем больше совпадение гармонических составляющих на этой частоте. ФК определяется путем нормировки взаимной спектральной плотности [3]:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}, \quad (1)$$

где  $S_{xy}(f)$  – функция взаимной спектральной плотности, «кросс-спектр»;  $S_{xx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$  – спектральные плотности случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

Обычно функции спектральной плотности (ФСП) определяются через автокорреляционные функции процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  и их взаимную корреляционную функцию по формулам Винера–Хинчина или через преобразование Фурье исходных сигналов [3, 4]:

$$S_{xx}(f) = \int_{-P/2}^{P/2} R_{xx}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau;$$

$$\hat{S}_{xy}(f) = \int_{-P/2}^{P/2} \hat{R}_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau;$$

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{P} |X(f)|^2; \quad S_{xy}(f) = \frac{1}{P} \overline{X(f)Y(f)}.$$

ФК для любых частот  $f$  удовлетворяет неравенствам:  $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$ . Для стационарных процессов значение ФК остается постоянным и не зависит от времени и от амплитуды входного сигнала. Можно предположить, что изменение внутренних свойств системы повлечет, соответственно, и изменение значений ФК.

В качестве объекта исследований используем АД 4А132М мощностью 11 кВт. Для исследования свойств функции когерентности представим АД в режиме короткого замыкания эквивалентной схемой (рис. 1).

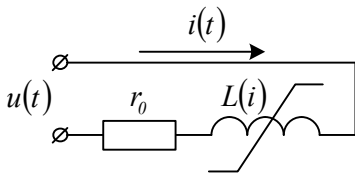


Рисунок 1 – Эквивалентная схема АД

В этом случае выходной ток  $i(t)$  связан с вход-

ным напряжением  $u(t)$  зависимостью

$$\frac{di}{dt} = (u(t) - i(t)r_0) \frac{1}{L(i)}.$$

Рассмотрим три случая (рис. 2):

1) пусть в текущий момент времени  $T_0$  система линейна и индуктивность  $L_1(i) = L_0 = 0,0573$  Гн;

2) пусть в момент времени  $T_1$ ,  $T_1 > T_0$ , система нелинейна, что обусловлено проявлением изменений внутренней структуры в виде нелинейных составляющих в зависимости  $L_0(i)$ :

$$L_2(i) = d \left( \frac{1}{a + bi^{K_n c}} + 0,255 \right) L_0, \quad (2)$$

где  $a = 1,352824$ ,  $b = 9,26296$ ,  $c = 5,739154$ ,  $d = 0,003$ ,  $K_n = 1$  – коэффициент линейной связи;

3) пусть в момент времени  $T_2$ ,  $T_2 > T_1$ , зона линейности еще более сужена, а  $K_n = 0,5$ :

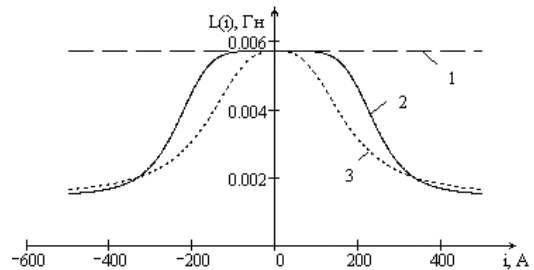


Рисунок 2 – Индуктивность АД для различных вариантов работы: 1 –  $L_1(i)$ , 2 –  $L_2(i)$ , 3 –  $L_3(i)$

Примем, что во всех случаях эквивалентное активное сопротивление  $r_0 = 0,312$  Ом и неизменно, к статору АД приложено полигармоническое напряжение  $u(t) = U_1 \sin(\omega t) + U_5 \sin(5\omega t) + U_7 \sin(7\omega t)$ . Причем  $U_1$  – номинальное фазное напряжение,  $U_5$  и  $U_7$  – 10 и 7 % номинального фазного напряжения соответственно. Такой сигнал в общем случае является моделью напряжения промышленной сети. Смоделируем помехи в сети, добавив случайный равномерный шум в функцию напряжения. Выходные сигналы всех трех случаев  $i_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  представлены на рис. 3.

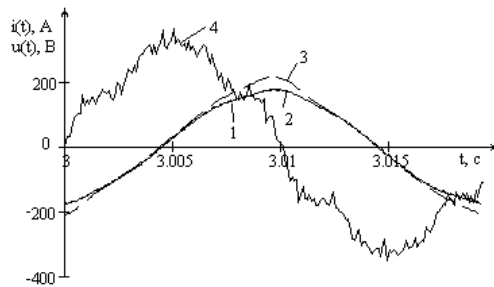


Рисунок 3 – Сигналы тока  $i_k(t)$  для  $k = 1, 2, 3$  и напряжения  $u(t)$  – 4, соответственно

Отличие в токах  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  проявляется в точках экстремума, что видно на рис. 4.

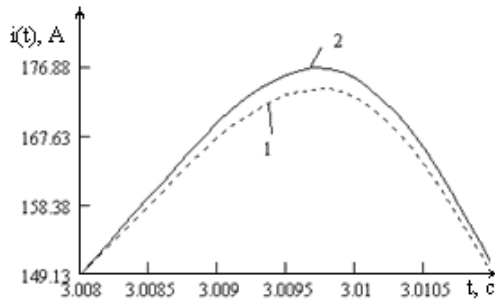


Рисунок 4 – Сигналы тока в точках экстремума для первого и второго случаев соответственно

Наличие помех в каналах измерений смоделируем в виде «белого» шума  $N(0, \sigma)$  таким образом, чтобы вносимая погрешность не превышала 2 % от текущего значения реального сигнала, что соответствует погрешностям современных АЦП, а также дополнительно синхронизируем входной и выходной сигналы по фазе (рис. 5).

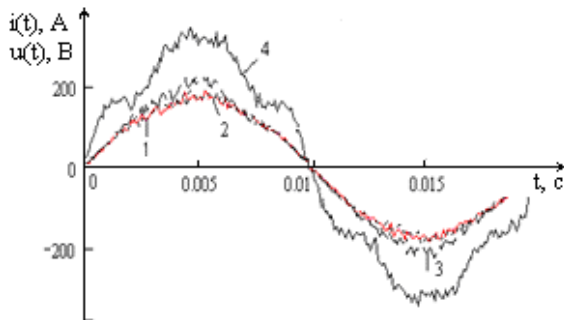


Рисунок 5 – Синхронизированные «зашумленные» сигналы тока  $i_k(t)$  для  $k = 1, 2, 3$  и напряжения  $u(t)$  – 4, соответственно

Для расчета ФК используем дискретные формулы расчета корреляционных функций и спектральных плотностей [3, 4]:

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=0}^{n-l-1} x_i x_{i+k}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1;$$

$$R_{xy}(l) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=0}^{n-l-1} x_i y_{i+l}, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1;$$

$$S_{xx}(k) = \Delta t \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} R_{xx}(l) e^{-\frac{j2\pi kl}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2};$$

$$S_{xy}(k) = \Delta t \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} R_{xy}(l) e^{-\frac{j2\pi kl}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2},$$

где  $n$  – количество точек в реализации случайных процессов  $x$  и  $y$ ;  $\Delta t$  – шаг дискретизации;  $l$  – диапазон сечений корреляционной функции;  $k$  – диапазон частот функций спектральной плотности.

Конечность выборки, используемой для оценки спектральных характеристик процессов, может при-

водит к появлению «утечек» – растеканию мощности процесса по полосе частот, что существенно изменяет характеристики процесса. Для борьбы с утечками используются различные сглаживающие окна. При расчете ФСП через корреляционные функции это может быть, например, окно Хеннинга, окно Хемминга, окно Парзена и др. Например, с учетом окна Хемминга, выражение для автокорреляционной функции принимает вид

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=0}^{n-l-1} x_i x_{i+k} \left( 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{i}{n} \pi\right) \right),$$

$$l = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Известно [1], что ФК, рассчитанная для одной реализации случайного процесса, тождественно равна единице, поэтому при расчете функций спектральной плотности используется усреднение по ансамблю реализаций случайного процесса. Для получения усредненных по ансамблю оценок функций спектральной плотности были использованы значения  $u(t)$  и  $i_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , полученные для пяти интервалов длины 0,02 с, что соответствует периоду основной гармоники входного напряжения. По каждой из реализаций случайных процессов были рассчитаны корреляционные и автокорреляционные функции по приведенным выше выражениям для  $n = 200$ ,  $\Delta t = 10^{-4}$  и соответствующие им значения ФСП. Усредненные оценки значений функций спектральной плотности случайных процессов  $u(t)$  и  $i_k(t)$ ,  $k = 1, 3$ , а также оценки их кросс-спектров представлены на рис. 6.

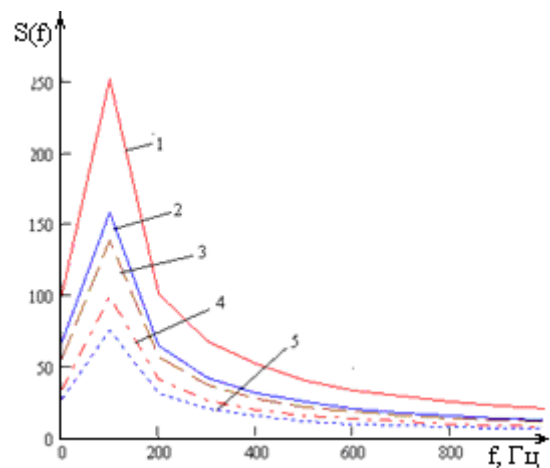


Рисунок 6 – Функции спектральной плотности: 1 –  $S_{uu}(f)$ ; 2 –  $S_{ui}(f)$  для тока  $i_3(t)$ ; 3 –  $S_{ui}(f)$  для тока  $i_1(t)$ ; 4 –  $S_{ii}(f)$  для тока  $i_3(t)$ ; 5 –  $S_{ii}(f)$  для тока  $i_1(t)$

Изображенные на рис. 6 зависимости представляют распределение энергий сигналов по частотам, но не позволяют определить степень взаимосвязи сигналов на входе и выходе системы для трех различных случаев, более того, для первого и второго режимов работы полученные значения ФСП прак-

тически совпадают. Именно по этой причине второй случай не отражен на рис. 6. Соответствующие рассчитанным ФСП оценки значений ФК для трех различных вариантов приведены на рис. 7.

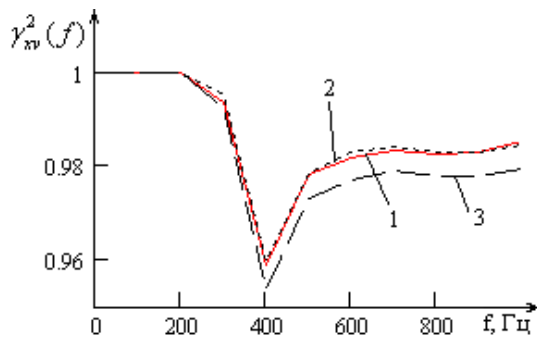


Рисунок 7 – Значения ФК для трех случаев соответственно

Анализ полученных значений ФК позволяет увидеть линейную зависимость низших гармоник случайных процессов  $u(t)$  и  $i_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  для всех трех случаев работы системы, но не позволяет увидеть четкую зависимость между уменьшением внутренних линейных свойств системы и изменением значений ФК. В то же время представленный график позволяет говорить о значительном отличии процесса  $i_2(t)$ ,  $k = 0, 1, 2$ , от процессов  $i_0(t)$  и  $i_1(t)$ , поскольку значения ФК для этого процесса явно меньше во всем диапазоне используемых частот.

Для выявления отличий между процессами  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  обратим внимание на то, что отличие их значений проявляется на достаточно малом временном интервале, соответствующем точкам экстремумов процессов (рис. 4). Можно предположить, что сужение интервала сечений корреляционной функции и, соответственно, увеличение эффективной разрешающей полосы  $B_e$  позволит выявить отличие в свойствах процессов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ , поскольку для

$$B_e = \frac{1}{\tau_{max}} = \frac{1}{m\Delta t}$$

с уменьшением числа интервалов  $m$  уменьшается и максимальное время запаздывания  $\tau_{max}$  и, соответственно, увеличивается разрешающая способность.

Для периодических процессов соответствующие корреляционные функции имеют значения одного знака в диапазоне  $T^+ = [0, 0,25T]$ , где  $T$  – длина периода. Исходя из этого, можно предположить, что именно в данном временном интервале могут сильнее проявиться отличия в силе линейной зависимости входного и выходного сигналов.

Приведенным выше значениям корреляционных функций и соответствующим значениям ФСП (рис. 6, 7) соответствует  $B_e = \frac{1}{100 \cdot 10^{-4}} = 100$  Гц и

$$\tau_{max} = 0,01 \text{ с.}$$

Поскольку для рассматриваемых значений  $T^+ = 0,005$  с, уменьшим ширину корреляци-

онного окна до  $m = 50$  точек, что даст  $B_e = 200$  Гц.

Полученные значения функций когерентности для трех случаев приведены на рис. 8. В отличие от рис. 7, здесь отличия во взаимосвязи процессов  $i_0(t)$  и  $i_1(t)$  проявлены четко во всей полосе частот и позволяют сделать однозначный вывод об уменьшении линейных свойств системы при переходе от первого ко второму, а затем к третьему случаям.

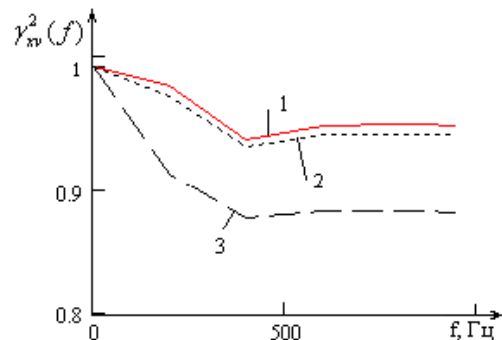


Рисунок 8 – Значения ФК, рассчитанные для трех случаев с  $B_e = 200$  Гц

Следует отметить, что проведенные расчеты ФК с  $20 < m < 80$  значительно изменяют рассчитанные оценки значений функции когерентности, но сохраняют общее соотношение во всей полосе рассматриваемых частот для трех вариантов работы системы. Изменение амплитуды входного напряжения и увеличение шумовой составляющей до 5 % также практически не меняет полученных результатов.

Поскольку наличие значительных шумов в канале измерений может исказить входные и выходные сигналы, можно предусмотреть предварительное удаление субгармонических компонент [3], например, методом медианного фильтра [4], или удаление статистически незначимых гармоник входного и выходного сигналов в соответствии с [5].

Для использования рассмотренного метода оценки изменения состояния ЭД по значениям ФК достаточно наличия данных о значениях входных и выходных сигналов. В том случае, если математическая модель системы известна, исследование значений ФК может позволить определить границы значений параметров, при которых система сохраняет линейные свойства. Так, в приведенной выше модели ЭМС различия в работе системы определяются свойствами функций  $L(i)$ . Значительное уменьшение ФК в третьем случае связано с резким уменьшением значения коэффициента  $K_n$  в модели (2). Проведенные исследования при различных значениях  $K_n$  позволили выявить нелинейную зависимость усредненного по всей полосе частот значения ФК от значений данного коэффициента в модели  $\overline{\gamma_{xy}^2} = F(K_n)$  (рис. 9).

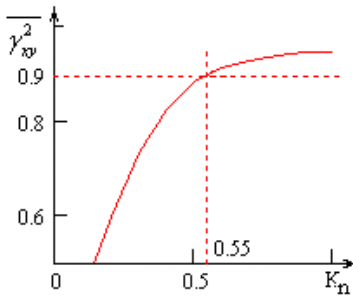


Рисунок 9 – Зависимость  $\overline{\gamma_{xy}^2} = F(K_n)$

Анализуя  $\overline{\gamma_{xy}^2} = F(K_n)$ , можно утверждать, что для данной ЭМС диапазон значений  $K_n$ , при котором система сохраняет линейные свойства, составляет [0,55; 1]. Именно в этом случае среднее по всей полосе частот значение функции когерентности сигналов напряжения и тока лежит в диапазоне [0,9; 1], что соответствует линейной взаимосвязи процессов [1, 2].

**ВЫВОДЫ.** Исследование значений ФК в различных режимах работы ЭМС позволяет определить границы значений параметров, при которых система сохраняет линейные свойства.

Благодаря использованию статистических мето-

#### STATISTICAL ESTIMATION OF THE ELECTROMECHANICS SYSTEMS LINEAR PROPERTIES

**A. Yudina, O. Chorny**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University  
ul. Pervomayskaya, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: iyusa@mail.ru

**Berdai Abdelmajid**

ENSEM, University Hassan II AIN Schok  
PO Box 8118, Oasis, Casablanca, Morocco. E-mail: a.berdai@gmail.com

Estimation of linear properties of the electromechanics systems in the conditions of incomplete or information about an underlying structure can be based on presentation of and output signals of the system – tension and current – as stationary on a certain temporal interval processes. For the statistical estimation of force of linear connection the coefficient of correlation of two casual processes or its frequency analogue is a function of coherentness can be in this case. The analysis of the expected values of function of coherentness with the use of the smoothed out cross - correlation functions and smoothed out the d of realization of processe allowed to draw a conclusion about expedience of the used of temporal window, period of entrance tension limited a fourth, for the receipt of meaningful distinctions in-process linear, near to linear and nonlinear systems.

**Key words:** electromechanics systems, spectral closeness, function of coherentness.

#### REFERENCES

1. Ljung L. System Identification. *Theory for the User*. – М.: Nauka, 1999. – 428 p. [in Russian]
2. Ventsel E.S. *Theory of chances: Studies. for institutions of higher learning*. – М.: Visshaya shkola, 1999. – 576 p. [in Russian]
3. Otnes R. *Applied time seris analysis*. – М.: Mir, 1982. – 428 p. [in Russian]
4. Box J., Dzhenkins G. *Analiz temporal rows. Prognosis and management*. – М.: Mir, 1974. – 604 p. [in Russian]
5. Sidorenko V.M., Chorny O.P., Rod'kin D.Y., Osadchuk Y.G. *Correction of electric signals of power circle of electric drives in the computer-assisted systems of monitoring: Monograph*. – Kremenchuk: PP Scherbattikh O.V., 2011. – 228 p. [in Ukrainian]

Стаття надійшла 21.07.2012.  
Рекомендовано до друку  
д.т.н., проф. Родькіним Д.Й.