

УДК 621.313.3

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА СОСТАВЛЯЮЩИХ МГНОВЕННОЙ МОЩНОСТИ

**Ю. В. Ромашихин, Д. А. Мосюндз, Н. А. Руденко**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: romashihin\_yuriy@mail.ru

**Д. И. Родькин**

Криворожская Центрально-Городская гимназия

ул. Первомайская, 16, г. Кривой Рог, 50027, Украина.

Рассмотрен энергетический метод идентификации электромагнитных параметров асинхронных двигателей, базирующийся на системе уравнений баланса составляющих мгновенной мощности. Проанализированы численные методы решения системы нелинейных уравнений энергетического метода, обоснован выбор начальных приближений и допустимых ограничений при решении уравнений. Рассмотрена эффективность энергетического метода при идентификации электромагнитных параметров асинхронных двигателей.

**Ключевые слова:** энергетический метод, уравнения баланса мощностей, составляющие мгновенной мощности, электромагнитные параметры асинхронных двигателей.

## ЕФЕКТИВНІСТЬ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ БАЛАНСУ СКЛАДОВИХ МИТТЄВОЇ ПОТУЖНОСТІ

**Ю. В. Ромашихін, Д. А. Мосюндз, М. А. Руденко**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: romashihin\_yuriy@mail.ru

**Д. І. Родькін**

Криворізька Центрально-Міська гімназія

вул. Першотравнева, 16, м. Кривий Ріг, 50027, Україна.

Розглянуто енергетичний метод ідентифікації електромагнітних параметрів асинхронних двигунів, що базується на системі рівнянь балансу складових миттєвої потужності. Проаналізовано чисельні методи розв'язання системи нелінійних рівнянь енергетичного методу, обґрунтовано вибір початкових наближень і припустимих обмежень при вирішенні рівнянь. Розглянуто ефективність енергетичного методу при ідентифікації електромагнітних параметрів асинхронних двигунів.

**Ключові слова:** енергетичний метод, рівняння балансу потужностей, складові миттєвої потужності, електромагнітні параметри асинхронних двигунів.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Идентификация электромагнитных параметров (ЭМП) асинхронных двигателей (АД) является важной научно-технической задачей, по существу, частью общей задачи диагностики электрических машин, хотя ее нельзя считать второстепенной. Значения электромагнитных параметров электрических машин (ЭМ) используются для решения вопросов, связанных с выбором и расчетом устройств защиты и автоматики машин переменного тока, в задачах испытаний электрических машин и управления потреблением электрической энергии, при решении вопросов исследовательского характера и учебного процесса, при настройке систем управления координатами асинхронных электроприводов с векторным управлением. Идентификация электромагнитных параметров испытуемых машин в условиях электроремонтных цехов является важной и актуальной задачей ввиду того, что позволяет оценить потери энергии в электрической машине, вибрационные моменты, рабочие и пусковые характеристики, составить послеремонтный паспорт электрической машины.

На сегодняшний день большинство методов идентификации ЭМП АД являются нетехнологичными и не удовлетворяют требованиям как испытательного процесса, так и практических задач со-

временного электропривода. Наиболее эффективными являются методы, в основе которых лежит использование математических моделей с учетом различного рода дефектов и неисправностей в виде дополнительных нелинейностей и контуров для АД, прошедших ремонт или находящихся долгое время в эксплуатации. Использование составляющих мгновенной мощности в задачах идентификации ЭМП АД позволяет существенно улучшить точность оценивания параметров электромашиных преобразователей [1, 2].

Одним из современных методов идентификации ЭМП АД является энергетический метод, основанный на использовании уравнений баланса составляющих гармоник мгновенной мощности источника полигармонического питания и элементов схемы замещения. Однако остается открытым вопрос оценки численных методов решения систем баланса составляющих мгновенной мощности при идентификации ЭМП АД. Поэтому целью работы является оценка эффективности использования численных методов решения систем уравнений баланса мощности при идентификации электромагнитных параметров асинхронных двигателей.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Мгновенная мощность определяется произведением сигналов напряжений и токов, которые могут

быть представлены в форме усеченных гармонических рядов Фурье [1, 2]:

$$u(t) = \sum_{n=0}^N U_{na} \cos(n\Omega t) + \sum_{n=0}^N U_{nb} \sin(n\Omega t); \quad (1)$$

$$i(t) = \sum_{m=0}^M I_{ma} \cos(m\Omega t) + \sum_{m=0}^M I_{mb} \sin(m\Omega t), \quad (2)$$

где  $U_n$  – амплитудные значения составляющих напряжения высших гармоник;  $n$  – номер гармоники напряжения;  $N$  – число гармоник напряжения;  $\Omega$  – частота сети;  $\varphi_n$  – угол сдвига фаз между напряжением и вещественной осью «а»;  $I_m$  – амплитудные значения составляющих тока высших гармоник;  $m$  – номер гармоники тока;  $M$  – число гармоник тока;  $\varphi_m$  – угол сдвига фаз между током и напряжением;  $U_{na}, I_{ma}, U_{nb}, I_{mb}$  – косинусные и синусные гармонические составляющие напряжения и тока соответственно.

Мгновенную мощность определяем по формуле [2]:

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (3)$$

Из [1] следует, что мгновенная мощность состоит из двух групп составляющих. Первая группа образуется в результате умножения одночастотных компонент напряжения и тока, т.е. при  $m = n$ . При этом частоты гармоник мгновенной мощности равны:  $k_c = m - n = 0$  и  $k_c = m + n = 2m$ . Нулевая частота  $k = 0$  соответствует постоянному значению мощности.

Вторая группа составляющих мгновенной мощности образуется в результате умножения разночастотных компонент напряжения и тока ( $m \neq n$ ). Частоты гармоник мгновенной мощности при этом равны:  $k_s = m \pm n \neq 0$ .

Мгновенная мощность определяется в виде суммы канонических и неканонических составляющих:

$$P_k = P_{k_c} + P_{k_s}. \quad (4)$$

Разделение знакопеременных составляющих мощности на канонические и неканонические позволяет записать выражение для мощности в таком виде:

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_0^{M=N} P_{k_0} + \sum_{k=1}^{M+N} P_{ka}(t) + \sum_{k=1}^{M+N} P_{kb}(t) = \\ &= \sum_0^{M=N} P_{k_0} + \sum_{k=1}^{M+N} (P_{ka_c}(t) + P_{ka_s}(t)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{M+N} (P_{kb_c}(t) + P_{kb_s}(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$P_{ka}(t) = (P_{ka_c} + P_{ka_s}) \cos(k\Omega t); \quad (6)$$

$$P_{kb}(t) = (P_{kb_c} + P_{kb_s}) \sin(k\Omega t); \quad (7)$$

$$P_{ka_c} = P_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{ma} + U_{nb} I_{mb}); \quad (8)$$

$k=m-n=0, m=n$

$$P_{ka_c} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{ma} - U_{nb} I_{mb}); \quad (9)$$

$k=m+n, m \neq n$

$$P_{ka_s} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{ma} + U_{nb} I_{mb}) + \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{ma} - U_{nb} I_{mb});$$

$k=m+n, m \neq n$

$$P_{kb_c} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{mb} + U_{nb} I_{ma}); \quad (11)$$

$k=m+n, m \neq n$

$$P_{kb_s} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (U_{na} I_{mb} - U_{nb} I_{ma}). \quad (12)$$

$k=|m \pm n|, m \neq n$

Полученные выражения для составляющих мгновенной мощности позволяют применять их при идентификации электромагнитных параметров как электрических схем, так и электрических машин. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями баланса. Базовым уравнением баланса является равенство мгновенной мощности источника питания  $P_u(t)$  и сумм мгновенных мощностей элементарных потребителей, входящих в комплекс [1, 2]:

$$P_u(t) = \sum_{i=1}^H p_i(t), \quad (13)$$

где  $i$  – индекс соответствующего элементарного потребителя;  $H$  – количество элементарных потребителей.

Применительно к известной Т-образной схеме замещения АД с индуктивностями рассеяния статора  $L_1$  и ротора  $L_2$ , индуктивностью контура намагничивания  $L_\mu$ , сопротивлением статора  $R_1$ , сопротивлением ротора  $R_2$  в качестве элементарных потребителей выступает каждый из параметров схемы замещения (рис. 1).

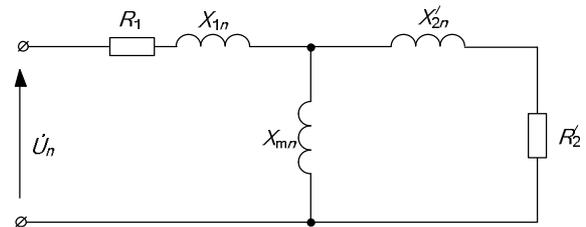


Рисунок 1 – Т-образная схема замещения АД

Система уравнений баланса мощностей для Т-образной схемы замещения (рис. 1) составляется для каждой из гармоник в виде равенства составляющих мгновенной мощности источника полигармонического напряжения сумме составляющих мгновенной мощности на активных и индуктивных сопротивлениях статорной и роторной цепей и контура намагничивания [2]:

$$\begin{cases} P_{0u} = P_{0R_1} + P_{0R'_2}; \\ P_{kau} = P_{kaR_1} + P_{kaR'_2} + P_{kaL_1} + P_{kaL_\mu} + P_{kaL'_2}; \\ P_{kbu} = P_{kbR_1} + P_{kbR'_2} + P_{kbL_1} + P_{kbL_\mu} + P_{kbL'_2}, \end{cases} \quad (14)$$

где  $P_{0u}, P_{0R_1}, P_{0R'_2}$  – постоянные составляющие мгновенной мощности соответственно источника полигармонического напряжения и активных сопротивлений первичной и вторичной цепей;  $P_{kau}, P_{kbu}$  – косинусные и синусные составляющие мгновенной мощности источника полигармонического напряжения;  $P_{kaR_1}, P_{kbR_1}, P_{kaR'_2}, P_{kbR'_2}$  – косинусные и синусные составляющие мгновенной мощности на активных сопротивлениях первичной и вторичной цепей;  $P_{kaL_1}, P_{kbL_1}, P_{kaL_\mu}, P_{kbL_\mu}, P_{kaL'_2}, P_{kbL'_2}$  – косинусные и синусные составляющие мгновенной мощности на индуктивностях первичной цепи, контура намагничивания и вторичной цепи.

Уравнения баланса мощностей при использовании трех гармоник напряжения и тока ( $m = n = 1, 3, 5$ ) примут вид:

$$P_{0u} = P_{0R_1} + P_{0R'_2}; \quad (15)$$

$$P_{2au} = P_{2aR_1} + P_{2aR'_2} + P_{2aL_1} + P_{2aL_\mu} + P_{2aL'_2}; \quad (16)$$

$$P_{2bu} = P_{2bR_1} + P_{2bR'_2} + P_{2bL_1} + P_{2bL_\mu} + P_{2bL'_2}; \quad (17)$$

$$P_{4au} = P_{4aR_1} + P_{4aR'_2} + P_{4aL_1} + P_{4aL_\mu} + P_{4aL'_2}; \quad (18)$$

$$P_{4bu} = P_{4bR_1} + P_{4bR'_2} + P_{4bL_1} + P_{4bL_\mu} + P_{4bL'_2}; \quad (19)$$

$$P_{6au} = P_{6aR_1} + P_{6aR'_2} + P_{6aL_1} + P_{6aL_\mu} + P_{6aL'_2}; \quad (20)$$

$$P_{6bu} = P_{6bR_1} + P_{6bR'_2} + P_{6bL_1} + P_{6bL_\mu} + P_{6bL'_2}; \quad (21)$$

$$P_{8au} = P_{8aR_1} + P_{8aR'_2} + P_{8aL_1} + P_{8aL_\mu} + P_{8aL'_2}; \quad (22)$$

$$P_{8bu} = P_{8bR_1} + P_{8bR'_2} + P_{8bL_1} + P_{8bL_\mu} + P_{8bL'_2}; \quad (23)$$

$$P_{10au} = P_{10aR_1} + P_{10aR'_2} + P_{10aL_1} + P_{10aL_\mu} + P_{10aL'_2}; \quad (24)$$

$$P_{10bu} = P_{10bR_1} + P_{10bR'_2} + P_{10bL_1} + P_{10bL_\mu} + P_{10bL'_2}. \quad (25)$$

Анализ приведенных уравнений баланса гармоник мгновенной мощности показывает, что для определения ЭМП АД с помощью Т-образной схемы замещения достаточно использовать три гармоники напряжения и тока, т.к. при этом получается 11 составляющих мгновенной мощности при 10 неизвестных схемы замещения: активное сопротивление ротора, индуктивности статора, ротора и контура намагничивания, а также составляющие гармоник токов ротора и контура намагничивания (при использовании трех гармоник напряжения и тока получается шесть неизвестных составляющих токов). Сопротивление статора  $R_1$  определяется заранее.

Полученные уравнения баланса составляющих мгновенной мощности являются нелинейными. Поэтому для идентификации ЭМП АД с использованием энергетического метода необходимо использовать численные методы решения систем нелинейных уравнений. В данной работе рассмотрен

вопрос о наиболее перспективных методах решения систем нелинейных уравнений, которые применимы при рассмотрении электрических схем замещения двигателей с последующим определением необходимых параметров. Наиболее часто применяются следующие методы: наименьших квадратов, градиентного спуска, сопряженных градиентов, метод Ньютона, метод Ньютона–Гаусса, метод Левенберга–Марквардта. Это связано с тем, что каждый из перечисленных методов [3–7] обладает одним или несколькими преимуществами перед остальными: простотой реализации, максимальной скоростью сходимости, высокой точностью. Рассмотрим каждый из них.

*Метод наименьших квадратов* (МНК) основан на минимизации суммы квадратов остатков регрессии и является одним из базовых методов анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

В соответствии с МНК существует некоторая параметрическая модель регрессионной зависимости между объясняемой переменной  $y$  и множеством факторов  $x$ :

$$y = f(x, b) + \varepsilon, \quad (26)$$

где  $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$  – вектор неизвестных параметров модели;  $\varepsilon$  – случайная ошибка модели.

При этом имеются выборочные наблюдения значений указанных переменных. Если  $t$  – номер наблюдения ( $t = 1..n$ ), тогда  $y_t, x_t$  – значения переменных в  $t$  наблюдении. В таком случае при заданных значениях параметров  $b$  можно рассчитать теоретические значения объясняемой переменной  $y$ :

$$\hat{y}_t = f(x_t, b). \quad (27)$$

Рассчитать остатки регрессионной модели можно с помощью разницы между наблюдаемыми значениями объясняемой переменной и теоретически:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - f(x_t, b). \quad (28)$$

Сущность МНК заключается в том, чтобы найти такие параметры  $b$ , при которых сумма квадратов остатков будет минимальной.

Решение этой задачи может осуществляться численными методами оптимизации с последующим получением аналитических решений. Для решения задачи минимизации необходимо решить полученную систему уравнений:

$$\sum_{t=1}^n (y_t - f(x_t, b)) \frac{\partial f(x_t, b)}{\partial b} = 0. \quad (29)$$

В случае, если случайные ошибки модели имеют нормальное распределение, одинаковую дисперсию и некоррелированы между собой, то МНК-оценки параметров совпадают с оценками метода максимального правдоподобия (ММП).

Основными преимуществами МНК являются возможность получения коэффициентов приближенной регрессии, работа с нелинейными моделями, минимизация ошибки.

К недостаткам стоит отнести то, что не все модели могут быть приведены к линейному виду, ме-

год даєть більшу погрешность, когда функция отклика существенно изменяется в выбранном интервале.

*Градиентный спуск* – метод нахождения локального минимума (максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например, метод золотого сечения. Также можно искать не наилучшую точку в направлении градиента, а какую-либо лучше текущей.

Из всех методов локальной оптимизации градиентный спуск является наиболее простым в реализации и имеет довольно слабые условия сходимости, но при этом скорость сходимости достаточно мала. Шаг градиентного метода часто используется как часть других методов оптимизации, например, метод Флетчера–Ривса.

Основная идея метода заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом  $-\nabla F$ :

$$\bar{x}^{[j+1]} = \bar{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\bar{x}^{[j]}), \quad (30)$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots$  – порядковый номер итерации, при этом  $j = 0$  – начальное приближение, а последующие значения рассчитываются как  $j = j + 1$ ;  $\bar{x}^{[j]}$  – корень уравнения на  $j$ -ой итерации.

$\lambda^{[j]}$  может быть представлена:

- постоянным значением – в этом случае метод может расходиться;
- дробным шагом, т.е. длина шага в процессе спуска делится на некое число;
- наискорейшим спуском:

$$\lambda^{[j]} = \arg \min_{\lambda} F(\bar{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\bar{x}^{[j]})). \quad (31)$$

Решение систем нелинейных уравнений методом градиентного спуска проводится по следующему алгоритму:

– задают начальное приближение и точность расчёта  $\bar{x}, \varepsilon$ ;

– рассчитывают  $\bar{x}^{[j+1]} = \bar{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\bar{x}^{[j]})$ , где  $\lambda^{[j]} = \arg \min_{\lambda} F(\bar{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\bar{x}^{[j]}))$ ;

– проверяют условие остановки: если  $|\bar{x}^{[j+1]} - \bar{x}^{[j]}| > \varepsilon$ ,  $|F(\bar{x}^{[j+1]}) - F(\bar{x}^{[j]})| > \varepsilon$  или  $\|\nabla F(\bar{x}^{[j+1]})\| > \varepsilon$  (выбирают одно из условий), то  $j=j+1$  и переход к предыдущему шагу, иначе  $x = \bar{x}^{[j+1]}$  и остановка.

Однако методы градиентного спуска имеют такой недостаток, как очень медленная скорость движения вдоль спуска к минимуму графика функции.

*Метод сопряженных градиентов* – метод нахождения локального минимума функции на основе информации о её значениях и градиенте. В случае квадратичной функции  $R^n$  минимум может быть найден за  $n$  шагов. Минимум находится вдоль направления  $\bar{S}_0$ . Соответственно, на некотором шаге в точке  $\bar{x}_k$  направление антиградиента выбирается равным  $\bar{r}_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$  – порядковый номер

итерации). При этом задается функция  $\bar{S}_k = \bar{r}_k + \omega_k \bar{S}_{k-1}$ , где  $\omega$  выбирается из условия  $\frac{(\bar{r}_k, \bar{r}_k)}{(\bar{r}_{k-1}, \bar{r}_{k-1})}$  либо  $\max(0, \frac{(\bar{r}_k, \bar{r}_k - \bar{r}_{k-1})}{(\bar{r}_{k-1}, \bar{r}_{k-1})})$ . После этого на-

ходится минимум в направлении  $\bar{S}_k$ , точка минимума  $\bar{x}_{k+1}$ . Если в вычисленном направлении функция не уменьшается, то необходимо менять направление с учетом того, что  $\omega_k = 0$ , и повторить шаг.

Решение систем нелинейных уравнений методом сопряженных градиентов описывается алгоритмом.

1. Задают начальное приближение и погрешность:  $\bar{x}^0, \varepsilon, k = 0$ .

2. Рассчитывают начальное направление:  $j = 0$ ;

$$\bar{S}_k^j = -\nabla f(\bar{x}_k); \bar{x}_k^j = \bar{x}_k.$$

3.  $\bar{x}_k^{j+1} = \bar{x}_k^j + \lambda \bar{S}_k^j; \lambda = \arg \min_{\lambda} f(\bar{x}_k^j + \lambda \bar{S}_k^j);$

$$\bar{S}_k^{j+1} = -\nabla f(\bar{x}_k^{j+1}) + \omega \bar{S}_k^j; \omega = \frac{\|\nabla f(\bar{x}_k^{j+1})\|^2}{\|\nabla f(\bar{x}_k^j)\|^2};$$

– если  $\|\bar{S}_k^{j+1}\| < \varepsilon$  или  $\|\bar{x}_k^{j+1} - \bar{x}_k^j\| < \varepsilon$ , то  $\bar{x} = \bar{x}_k^{j+1}$

и остановка;

– если  $(j+1) < n$ , то  $j = j+1$  и переход к пункту 3;

–  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k^{j+1}, k = k+1$  и переход к пункту 2.

При использовании метода сопряженных градиентов квадратичная функция может быть минимизирована за  $n$  шагов (по одному в каждом направлении, при этом их порядок несущественен).

В методе сопряженных градиентов  $x_k$  является точкой минимума квадратичной функции на подпространстве, порожденном первыми  $k$  градиентами. Шаг выбирается по линейной комбинации предыдущих градиентов. Следовательно, метод сопряженных градиентов является оптимальным по скорости сходимости среди методов первого порядка.

*Метод Ньютона* представляет собой итерационный численный метод нахождения корней заданной функции. Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью и может быть использован для решения задач оптимизации, в которых требуется определить нули первой производной или градиента в случае многомерного пространства.

При решении системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

необходимо выбрать некоторое начальное значение  $\bar{x}^{[0]}$ . Последовательные приближения  $\bar{x}^{[j+1]}$  находятся путём решения систем уравнений:

$$f_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (x_k^{[j+1]} - x_k^{[j]}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

где  $\bar{x}^{[j]} = (x_1^{[j]}, x_2^{[j]}, \dots, x_n^{[j]})$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$

Нахождение минимума функции многих переменных  $f(\bar{x})$  равносильно задаче нахождения нуля градиента  $\nabla f(\bar{x})$ :

$$\nabla f(\bar{x}^{[j]}) + H(\bar{x}^{[j]})(\bar{x}^{[j+1]} - \bar{x}^{[j]}) = 0, \quad (34)$$

где  $H(\bar{x})$  – гессиан функции  $f(\bar{x})$  (матрица вторых производных).

С учетом математических преобразований получим систему уравнений для нахождения минимума функции многих переменных:

$$\bar{x}^{[j+1]} = \bar{x}^{[j]} - H^{-1}(\bar{x}^{[j]})\nabla f(\bar{x}^{[j]}). \quad (35)$$

Следует отметить, что в случае квадратичной функции метод Ньютона позволяет найти экстремум за одну итерацию.

Нахождение матрицы Гессе связано с большими вычислительными затратами и зачастую не представляется возможным. В таких случаях в качестве альтернативных могут служить *квазиньютоновские методы*, в которых приближение матрицы Гессе строится в процессе накопления информации о кривизне функции.

Основными преимуществами метода являются:

- сходимость за одну итерацию для квадратичной функции;
- максимальная скорость сходимости (квадратичная) среди общих градиентных методов для неквадратичных функций.

К недостаткам можно отнести следующее:

- необходимость вычисления первой и второй производных в каждой точке;
- использование метода только в том случае, когда функция  $f(x)$  имеет достаточно простую аналитическую форму;
- необходимость выбора двух специфических подпрограмм вычисления производных  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , что не позволяет строить общие алгоритмы.

Скорость сходимости метода Ньютона квадратичная в случае, когда начальная точка итераций  $x_0$  достаточно близка к искомому минимуму. Однако глобальная сходимость метода Ньютона не гарантируется, его необходимо комбинировать с другим методом для быстрого получения хорошей аппроксимации искомого оптимума. В таком случае несколько итераций метода Ньютона с этой точкой, в качестве исходной, достаточны для получения высокой точности.

*Метод Ньютона–Гаусса* – это итерационный численный метод нахождения решения задачи наименьших квадратов, являющийся разновидностью метода Ньютона, использующего матрицу Якобиана  $J$  – матрицу производных первого порядка функции  $F$  для нахождения вектора  $x$  значений параметра, который минимизирует остаточные суммы квадратов.

Метод Ньютона–Гаусса построен на предположении о том, что произведение транспонированной матрицы Якоби и матрицы первых производных

(матрицы Якоби)  $J^T(\bar{x})J(\bar{x})$  доминирует над  $Q(\bar{x})$  ( $Q(\bar{x})$  – вероятность того, что стандартная нормальная случайная величина получит значение большее, чем  $x$ ). Это требование не соблюдается, если минимальные невязки велики, т.е. если норма  $\|\bar{f}(\bar{x})\|$  сравнима с максимальным собственным значением матрицы  $J^T(\bar{x})J(\bar{x})$ . В противном случае можно записать:

$$J^T(\bar{x})J(\bar{x})\bar{p} = -J^T(\bar{x})f(\bar{x}), \quad (36)$$

где  $\bar{p}$  – вектор используемых параметров.

Таким образом, когда норма  $\|Q(\bar{x})\|$  близка к нулю, а матрица  $J(\bar{x})$  имеет полный столбцовый ранг, направление  $\bar{p}$  мало отличается от ньютоновского. Тогда метод может достигать квадратичной скорости сходимости, хотя вторые производные и не учитываются.

В стандартном итерационном методе Ньютона на каждой итерации требуется вычисление и обращение матрицы Гессе. В методе Ньютона–Гаусса такой необходимости нет. При этом скорость сходимости также может достигать квадратичной, хотя вторые производные и не учитываются. Метод Ньютона–Гаусса прост в реализации, но, тем не менее, часто встречается ряд проблем в ситуации, когда составляющая второго порядка  $Q(\bar{x})$  значительна по величине, что приводит к некорректной работе и медленной скорости сходимости.

*Метод Левенберга–Марквардта* предназначен для оптимизации параметров нелинейных регрессионных моделей. В качестве критерия оптимизации используется среднеквадратичная ошибка модели на обучающей выборке. Алгоритм заключается в последовательном приближении заданных начальных значений параметров к искомому локальному оптимуму.

Основным отличием метода является использование матрицы Якоби, а не градиент вектора параметров. От алгоритма Ньютона–Гаусса этот алгоритм отличается тем, что использует параметр регуляризации.

Метод направлен на решение задач наименьших квадратов и может рассматриваться как комбинация метода Ньютона–Гаусса с методом градиентного спуска или как метод доверительных интервалов.

Алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом Левенберга–Марквардта приведен ниже.

- Определяется направленность поиска:

$$\left[ J^T(\bar{x}_k)J(\bar{x}_k) + \lambda_k I \right] \bar{p}_k = -J^T(\bar{x}_k)f(\bar{x}_k), \quad (37)$$

где  $\lambda_k$  – некоторая неотрицательная константа для каждого шага;  $I$  – единичная матрица;  $\bar{p}_k$  – оценка вектора используемых параметров  $\bar{p}$  на  $k$ -ой итерации,  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{p}_k$ ;

- производится выбор  $\lambda_k$  по функции невязки

$F(\bar{x})$ , т.е. увеличивается параметр до тех пор, пока не будет достигнуто условие  $F(\bar{x}_{k+1}) < F(\bar{x}_k)$ . Также  $\lambda_k$  можно устанавливать исходя из отношения между фактическими изменениями функции  $\bar{f}(\bar{x}_k)$ , достигнутыми в результате пробных шагов, и ожидаемыми величинами этих изменений при интерполяции;

– для проверки параметра  $\bar{p}_k$  необходимо выполнить условие

$$\bar{p}_k = \arg \min_{\|p\| \leq \Delta} \|J^T(\bar{x}_k)\bar{p} + \bar{f}(\bar{x}_k)\|, \quad (38)$$

где  $\Delta$  – параметр, связанный с  $\lambda_k$ .

При  $\lambda_k = 0$  решение производится методом Ньютона–Гаусса.

При достаточно большом  $\lambda_k$  направление  $\bar{p}_k$  незначительно отличается от направления наискорейшего спуска. Таким образом, при правильном подборе параметра  $\lambda_k$  добиваются монотонного убывания минимизируемой функции. Неравенство  $F(\bar{x}_{k+1}) < F(\bar{x}_k)$  всегда можно обеспечить, выбрав  $\lambda_k$  достаточно большим. Однако при этом теряется информация о кривизне, заключённая в первом слагаемом, и проявляются все недостатки метода градиентного спуска: в местах пологого наклона антиградиент мал, а в местах с крутым наклоном – велик, в то время как в первом случае желательно делать большие шаги, а во втором – маленькие. Поэтому если есть длинная и узкая впадина на поверхности, определяемой функцией невязки  $F(\bar{x})$ , то компоненты градиента вдоль основания впадины – малы, а в направлении к стенкам – велики. При замене единичной матрицы на диагональ матрицы Гессе можно достичь увеличения шага вдоль пологих участков и уменьшения вдоль крутых спусков:

$$\{J(\bar{x})J(\bar{x}) + \lambda \text{diag}[J(\bar{x})J(\bar{x})]\} \bar{p} = -J(\bar{x})f(\bar{x}), \quad (39)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – порядковый номер итерации.

Достоинством данного метода является то, что для моделей средних размеров метод Левенберга–Марквардта работает быстрее, чем метод градиентного спуска.

Единственный его недостаток заключается в необходимости обращения матрицы на каждом шаге. Даже несмотря на то, что нахождение обратной матрицы обычно выполняется с использованием быстрых методов псевдообращения (таких, как разложение по сингулярным числам матрицы), время одной итерации становится неприемлемым для моделей больших размеров.

С учетом вышесказанного, выбор метода решения нелинейных уравнений является важным этапом при рассмотрении какой-либо математической задачи, т.к. каждый из них имеет ряд ограничений и эффективен для применения при определённых условиях.

В задачах идентификации параметров электрических цепей, где количество неизвестных может быть значительным, для получения корректных результатов из вышперечисленных методов следует применять такие, как метод Ньютона, метод Ньютона–Гаусса и метод Левенберга–Марквардта. Поэтому в данных задачах, в зависимости от значений начальных параметров и нулевых приближений, пользуются одним из трёх перечисленных методов или же их комбинацией с более простыми методами: наименьших квадратов, градиентного спуска, сопряженных градиентов.

В табл. 1 приведены результаты решения системы нелинейных уравнений баланса мощностей каждым из трех методов. Известными параметрами при составлении уравнений баланса являются значения гармоник напряжений и токов статора АД:  $U_{11}, U_{13}, U_{15}, I_{11}, I_{13}, I_{15}$ . При этом сопротивление статора может быть рассчитано заранее одним из известных методов. Точность шага расчета  $\epsilon$  определяет количество необходимых итераций. К вводимым начальным приближениям относятся активное сопротивление ротора  $R_2$ , гармонические составляющие тока ротора  $I_{21}, I_{23}, I_{25}$ , индуктивность статора  $L_1$ , индуктивность ротора  $L_2$ , индуктивность контура намагничивания  $L_\mu$ . При этом можно рассмотреть два случая, когда начальные приближения ненулевые (получены, например, из опытов холостого хода и короткого замыкания) и когда они равны нулю.

При идентификации ЭМП АД вводятся ограничения при определении корней системы уравнений в виде:

$$aR_{zad.} < R_{ras.} < bR_{zad.}; \quad (40)$$

$$aL_{zad.} < L_{ras.} < bL_{zad.}, \quad (41)$$

где  $R_{ras.}, L_{ras.}$  – значения определяемых параметров;  $R_{zad.}, L_{zad.}$  – значения параметров, рассчитанных на основе каталожных данных;  $a = 0,4$  – нижний предел;  $b = 1,4$  – верхний предел.

Для сравнения точности решения была использована среднеквадратическая погрешность:

$$e^2 = \left(\frac{R_{2zad.} - R_{2ras.}}{R_{2zad.}}\right)^2 + \left(\frac{L_{1zad.} - L_{1ras.}}{L_{1zad.}}\right)^2 + \left(\frac{L_{\mu zad.} - L_{\mu ras.}}{L_{\mu zad.}}\right)^2 + \left(\frac{L_{2zad.} - L_{2ras.}}{L_{2zad.}}\right)^2, \quad (42)$$

где  $R_{2zad.}, L_{1zad.}, L_{\mu zad.}, L_{2zad.}$  – ЭМП АД, полученные из модели.

Для оценки эффективности использования численных методов при идентификации ЭМП рассматривался АД типа 4АП100Л4У3 с номинальной мощностью 4 кВт. При этом питание осуществлялось от тиристорного регулятора напряжения. Для анализа приняты первые три гармоники напряжения и тока. Известные начальные данные для реализации энергетического метода приведены в табл. 2, а начальные приближения – в табл. 3. Сопротивление статора определяется известными методами  $R_1 = 1,35$  Ом.

Таблиця 1 – Результати ідентифікації ЕМП АД

ЭМП	Результаты идентификации ЭМП АД с использованием численных методов											
	Метод Ньютона				Метод Ньютона–Гаусса				Метод Левенберга–Марквардта			
Ограничения	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
Начальные приближения	ненулевые	ненулевые	нулевые	нулевые	ненулевые	ненулевые	нулевые	нулевые	ненулевые	ненулевые	нулевые	нулевые
R <sub>2</sub> , Ом	1,392	1,392	0,448	5,39·10 <sup>-4</sup>	1,949	1,392	0,448	5,39·10 <sup>-4</sup>	1,157	1,451	1,86	0,017
L <sub>1</sub> , Гн	6,758·10 <sup>-3</sup>	6,758·10 <sup>-3</sup>	9,461·10 <sup>-3</sup>	-0,022	9,461·10 <sup>-3</sup>	6,758·10 <sup>-3</sup>	9,461·10 <sup>-3</sup>	-0,022	-9,326·10 <sup>-3</sup>	-0,023	0,116	-34,5
L <sub>2</sub> , Гн	6,726·10 <sup>-3</sup>	6,726·10 <sup>-3</sup>	9,416·10 <sup>-3</sup>	0,035	3,625·10 <sup>-3</sup>	6,726·10 <sup>-3</sup>	9,416·10 <sup>-3</sup>	0,035	-5,221·10 <sup>-3</sup>	0,022	-0,085	-1,751
L <sub>ц</sub> , Гн	0,246	0,246	-0,011	0,016	0,098	0,246	-0,011	0,016	0,093	0,013	0,067	1,668
I <sub>2a1</sub> , А	-0,113	-0,113	0,115	0,106	-0,059	-0,113	0,115	0,106	-0,263	-0,282	-0,188	1,653
I <sub>2a3</sub> , А	8,6·10 <sup>-3</sup>	8,6·10 <sup>-3</sup>	0,256	-0,015	0,049	8,6·10 <sup>-3</sup>	0,256	-0,015	-2,463·10 <sup>-3</sup>	0,012	-0,119	0,103
I <sub>2a5</sub> , А	0,073	0,073	-0,345	0,056	0,107	0,073	-0,345	0,056	0,057	-1,611·10 <sup>-3</sup>	0,208	-1,189
I <sub>2b1</sub> , А	-0,059	-0,059	-0,194	-3,09·10 <sup>-3</sup>	-0,06	-0,059	-0,194	-3,09·10 <sup>-3</sup>	-0,066	-0,03	-0,036	1,009
I <sub>2b3</sub> , А	-0,091	-0,091	-0,127	-0,04	-0,07	-0,091	-0,127	-0,04	-0,108	-0,038	-0,045	1,835
I <sub>2b5</sub> , А	0,035	0,035	-0,177	-0,035	-0,039	0,035	-0,177	-0,035	-0,052	-6,495·10 <sup>-3</sup>	5,744·10 <sup>-3</sup>	1,012
Е	3,631·10 <sup>-6</sup>	3,631·10 <sup>-6</sup>	907,86	54,565	28,173	3,631·10 <sup>-6</sup>	907,86	54,565	18,947	31,532	673,13	2,614·10 <sup>7</sup>

Таблиця 2 – Начальные данные

U <sub>1a1</sub> В	U <sub>1a3</sub> В	U <sub>1a5</sub> В	U <sub>1b1</sub> В	U <sub>1b3</sub> В	U <sub>1b5</sub> В	I <sub>1a1</sub> А	I <sub>1a3</sub> А	I <sub>1a5</sub> А	I <sub>1b1</sub> А	I <sub>1b3</sub> А	I <sub>1b5</sub> А
1,431	4,263	0,96	-5,449	0,623	-0,562	-0,097	-0,00912	0,072	-0,057	-0,103	-0,056

Таблиця 3 – Начальные приближения

R <sub>2</sub> , Ом	L <sub>1</sub> , Гн	L <sub>ц</sub> , Гн	L <sub>2</sub> , Гн	I <sub>2a1</sub> , А	I <sub>2a3</sub> , А	I <sub>2a5</sub> , А	I <sub>2b1</sub> , А	I <sub>2b3</sub> , А	I <sub>2b5</sub> , А
1,392	6,758·10 <sup>-3</sup>	0,246	6,726·10 <sup>-3</sup>	-0,113	0,0086	0,073	-0,059	-0,091	0,035

Результаты идентификации ЭМП АД с нулевыми и ненулевыми начальными приближениями приведены в табл. 1, где «+» означает, что введены ограничения, а «-» – их отсутствие.

Анализ значений, представленных в табл. 1–3, показал, что для данного случая при ненулевых начальных приближениях и присутствующих ограничениях наиболее эффективным вычислительным методом для нахождения корней системы является метод Ньютона. В случае, когда начальные приближения являются ненулевыми, а ограничения отсутствуют, наиболее эффективными в равной степени являются метод Ньютона и метод Ньютона–Гаусса. В случае, когда начальные приближения являются нулевыми, а ограничения присутствуют, наиболее эффективным методом является метод Левенберга–Марквардта. При нулевых начальных приближениях и отсутствующих ограничениях наиболее эффективными и равноценными вычислительными методами являются метод Ньютона и метод Ньютона–Гаусса.

**ВЫВОДЫ.** В работе показано, что при идентификации электромагнитных параметров асинхронных двигателей энергетическим методом, который базируется на уравнениях баланса составляющих гармоник мгновенной мощности, получена система нелинейных уравнений. Так как от точности решения нелинейных уравнений в данном случае зави-

сит результат объективности полученных данных, эта задача была рассмотрена отдельно.

Таким образом, в результате решения вышеуказанной системы различными методами можно сделать следующие выводы: для решения системы нелинейных уравнений с целью идентификации ЭМП АД наиболее эффективным вычислительным методом для нахождения корней системы является метод Ньютона, поскольку данный численный метод обладает высокой сходимостью и позволяет производить вычисления при найденном глобальном минимуме функции. С целью увеличения точности решения системы идентификационных уравнений он также позволяет вводить начальные приближения и ограничения, которые могут быть рассчитаны на основании каталожных данных или из опытов холостого хода и короткого замыкания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Возможности и эффективность метода энергодиагностики в идентификационных задачах / Д.И. Родькин, Ю.В. Ромашихин // XIV Міжнар. наук.-техн. конф. “Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика”. Сборник научных трудов Днепродзержинского государственного технического университета. – Днепродзержинск, 2007. – С. 507–512.

2. Родькин Д.И., Ромашихин Ю.В. Исследование области решений энергетического метода идентификации электромагнитных параметров асинхронных двигателей // *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. – Кременчук: КДПУ ім. М. Остроградського, 2010. – Вип. 4/2010 (12). – С. 36–52.

3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 360 с.

4. Численные методы / В.М. Заварькин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. – М.: Просвещение, 1991. – 176 с.

5. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 142 с.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

**DECISIONS EFFECTIVE OF THE NONLINEAR EQUATIONS FOR THE BALANCE OF THE INSTANTANT POWER SYSTEMS OF NUMERICAL METHODS**

**Yu. Romashihin, D. Mosyundz, N. Rudenko**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University  
ul. Pervomayskaya, 20, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: romashihin\_yuriy@mail.ru

**D. I. Rodkin**

Krivoy Rog Central City High School  
ul. Pervomayskaya, 16, Krivoy Rog, 50027, Ukraine.

This article describes a method for identifying the energy of electromagnetic parameters of induction motors based on a system of balance equations for the components of the instantaneous power. Analyzed by numerical methods for solving systems of nonlinear equations, the energy method, justified the choice of initial approximations and the allowable limits for solving equations. The efficiency of the energy method for the identification of electromagnetic parameters of induction motors.

**Key words:** energy method, the equations of balance of power, instantaneous power components, the electromagnetic parameters of induction motors.

REFERENCES

1. Capabilities and effectiveness of the method in the identification tasks of the energy diagnostics / D.I. Rodkin, Yu.V. Romashihin // *XIV International Scientific Conference "The problem automated electric drive. Theory and practice". Collection of scientific works Dneprodzerzhinsk State Technical University*. – Dneprodzerzhinsk, 2007. – PP. 507–512. [in Russian]

2. Investigation of solutions of the energy method of identification of electromagnetic parameters of asynchronous motors / D.I. Rodkin, Y.V. Romashihin // *Electromechanical and energy saving systems*. – Iss. 4/2010 (12). – Kremenchuk: KDPU, 2010. – PP. 36–52. [in Russian]

3. Morozov V.A. *Regular methods for solving ill-posed problems*. – М.: MGU, 1974. – 360 p. [in Russian]

4. *Numerical Methods* / V.M. Zavarykin, V.G. Zhitomirsky, M.P. Lapchik. – М.: Prosvescheniye, 1991. – 176 p. [in Russian]

5. *Methods for solving ill-posed problems* / A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. – М.: Nauka, 1979. [in Russian]

6. Samarsky A.A., Gulin A.V. *Numerical methods*. М.: Nauka, 1989. – 432 p. [in Russian]

7. Gill F., Murray W., Wright M. *Practical optimization*. – М.: Myr. 1985. – 509 p. [in Russian]

Стаття надійшла 5.05.2012.

Рекомендовано до друку  
д.т.н., проф. Родькіним Д.Й.