

УДК 681.511.42

ВПЛИВ МЕТОДУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ НА ПОВЕДІНКУ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО КЕРУВАННЯ

В. І. Мороз, І. Г. Головач, Я. С. Паранчук

Національний університет "Львівська політехніка"

вул. Ст. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна. E-mail: vmoroz@lp.edu.ua, tais_tm@ukr.net, yparanchuk@yahoo.com

Зроблено огляд впливу методів дискретизації неперервних систем на дискретні реалізації типових структур цифрових регуляторів. Аналіз виконано на прикладі двох елементарних ланок: з дійсним полюсом і парою комплексно-спряжених полюсів. Дослідження проведено для аналітичного і трьох популярних числових методів дискретизації. Показано їх вплив на кількість нулів і полюсів результуючої дискретної передатної функції. Для ланки з парою комплексно-спряжених полюсів побудовано кореневі годографи отриманих дискретних реалізацій.

Ключові слова: z-перетворення, дискретна система, методи дискретизації, цифрове керування.

ВЛИЯНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. И. Мороз, И. Г. Головач, Я. С. Паранчук

Национальный университет "Львовская политехника"

ул. Ст. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина. E-mail: vmoroz@lp.edu.ua, tais_tm@ukr.net, yparanchuk@yahoo.com

Проведен обзор влияния методов дискретизации непрерывных систем на дискретные реализации типичных структур цифровых регуляторов. Анализ выполнен на примере двух элементарных звеньев: с действительным полюсом и парой комплексно-сопряженных полюсов. В исследованиях применены аналитический и три популярных численных метода дискретизации. Показано их влияние на количество нулей и полюсов результирующей дискретной передающей функции. Для звена с парой комплексно-сопряженных полюсов построены корневые годографы полученных дискретных реализаций.

Ключевые слова: z-преобразование, дискретная система, методы дискретизации, цифровое управление.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Широке поширення цифрових систем керування зумовлено їх універсальністю та можливостями реалізації складних алгоритмів. Важливим фактором під час їх синтезу є спосіб переходу від аналогового прототипу до дискретної системи, тобто метод дискретизації. Роботою, що акцентує увагу на впливі методу дискретизації неперервної системи на поведінку отриманої цифрової моделі (на прикладі явного методу Адамса другого порядку), є монографія [1]. Аналіз інтеграторів у системах керування на основі частотних методів зроблено в роботі [2].

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Дослідження впливу способу дискретизації виконано для двох типів полюсів передатних функцій, якими описують цифрові системи керування:

– дійсного полюса (відповідає передатній функції $\frac{1}{Ts+1}$ і диференціальному рівнянню $Ty' + y = x$, де y – вихідна координата; T – стала часу; x – вхідний сигнал);

– пари комплексно-спряжених полюсів (відповідає передатній функції $\frac{1}{(sT)^2 + 2\xi sT + 1}$ і диференціальному рівнянню $T^2y'' + 2\xi Ty' + y = x$, де T – стала часу; ξ – коефіцієнт угамування).

Аналіз впливу способу дискретизації виконано на прикладі таких способів дискретизації:

– відображення нулів/полюсів в одиничному колі [3]:

$$\sum_{i=1}^n (s - p_i) \xRightarrow{\text{операція дискретизації}} \sum_{i=1}^n (z - P_i^*), \quad (1)$$

де p_i – i -ий корінь полінома чисельника/знаменника неперервної передатної функції досліджуваної системи; P_i^* – i -ий корінь чисельника/знаменника дис-

кретної передатної функції досліджуваної системи, що визначається із залежності $P_i^* = e^{p_i h}$;

– явного методу Ейлера $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{T} y_i'$;

– методу трапецій $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2T} (y_i' + y_{i+1}')$;

– неявного методу Адамса третього порядку

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12T} (5y_{i+1}' + 8y_i' - y_{i-1}').$$

Дійсний полюс. Із застосуванням для дискретизації методу відображення нулів і полюсів матимемо дискретну передатну функцію ланки з дійсним ко-
рнем:

$$\frac{1}{Ts+1} \Rightarrow \frac{1 - e^{-h/T}}{z - e^{-h/T}} \text{ – один дискретний полюс.}$$

Для методу Ейлера рекурентне рівняння i , відповідно, дискретна передатна функція цифрової моделі аперіодичної ланки матиме один полюс і виглядатиме таким чином:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + y_i' h/T; \\ y_i' &= (x - y_i)/T; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Rightarrow y_{i+1} = (1 - h/T)y_i + x_i h/T \Rightarrow \frac{h/T}{z - (1 - h/T)}. \quad (2)$$

Аналогічно, для неявного методу трапецій матимемо дискретну передатну функцію цифрової моделі аперіодичної ланки з одним полюсом і нулем

$$\frac{z+1}{(2T/h+1)z - (2T/h-1)} \quad (3)$$

і для неявної формули Адамса третього порядку отримаємо дискретну передатну функцію з двома полюсами і двома нулями:

$$\frac{5z + 8 - z^{-1}}{(5 + 12h/T)z + (8 - 12h/T) - z^{-1}}. \quad (4)$$

Пара комплексно-спряжених полюсів. Застосовуючи для дискретизації метод відображення нулів і

поліосів матимемо дискретну передатну функцію з парою поліосів:

$$\frac{1}{(sT)^2 + 2\xi sT + 1} \Rightarrow \frac{1 - 2e^{-\xi \frac{h}{T}} \cos\left(\frac{h}{T} \sqrt{1 - \xi^2}\right) + e^{-2\xi \frac{h}{T}}}{z^2 - 2ze^{-\xi \frac{h}{T}} \cos\left(\frac{h}{T} \sqrt{1 - \xi^2}\right) + e^{-2\xi \frac{h}{T}}} z^2 \quad (5)$$

Для методу Ейлера дискретна передатна функція цифрової моделі коливної ланки другого порядку також матиме два поліоси:

$$\frac{1}{z^2(T/h)^2 + 2z(\xi - T/h)T/h + 1 - 2\xi T/h + (T/h)^2} \quad (6)$$

Для неявного методу трапецій одержимо дискретну передатну функцію з двома поліосами і нулями:

$$\frac{z^2 + 2z + 1}{a_2 z^2 + a_1 z + 1 - a_0} \quad (7)$$

де $a_2 = 4 \frac{T}{h} \left(\frac{T}{h} + \xi \right) + 1$; $a_1 = 2 - 8 \left(\frac{T}{h} \right)^2$;

$a_0 = 4 \frac{T}{h} \left(\frac{T}{h} - \xi \right) + 1$, а для неявної формули Адамса

третього порядку – дискретну систему з чотирма поліосами і нулями:

$$\frac{25z^4 + 80z^3 + 54z^2 - 16z + 1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad (8)$$

де $a_4 = \frac{24T}{h} \left(6 \frac{T}{h} + 5\xi \right) + 25$; $a_3 = \frac{-72T}{h} \left(4 \frac{T}{h} - \xi \right) + 80$;

$a_2 = \frac{72T}{h} \left(2 \frac{T}{h} - 3\xi \right) + 54$; $a_1 = 24\xi \frac{T}{h} - 16$; $a_0 = 1$.

Аналіз отриманих передатних функцій і кореневих годографів (рис. 1) показує, що числові методи, застосовані для дискретизації неперервних систем, вносять додаткові нулі/поліоси в одержані дискретні

передатні функції, що змінює поведінку цифрової системи відносно аналогового прототипу.

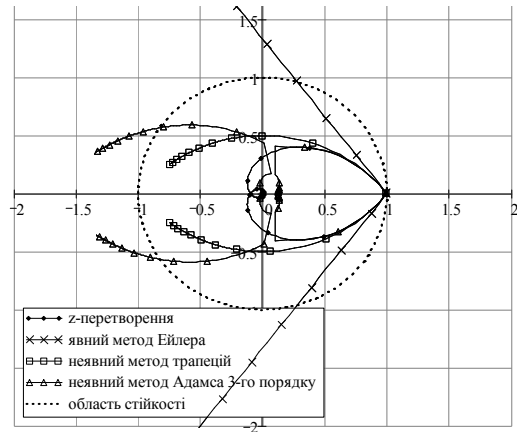


Рисунок 1 – Кореневі годографи різних цифрових реалізацій ланки другого порядку

ВИСНОВКИ. З відомих способів дискретизації неперервних систем оптимальним для синтезу цифрових систем керування є застосування відображення нулів/поліосів, оскільки він найменше спотворює поведінку вихідної системи.

ЛІТЕРАТУРА

- Смит Дж.М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей: моногр.; пер. с англ. Н.П. Ильиной; под. ред. О.А. Чембровского – М.: Машиностроение, 1980. – 271 с.
- Мороз В. Числові інтегратори в цифрових системах керування // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2006. – № 563. – С. 99–104.
- Jury E.I. Theory and Application of the Z-Transform Method. – New York: John Wiley & Sons, Inc. – 1964. – 327 p.

EFFECT OF THE DISCRETIZATION METHOD ON DIGITAL CONTROL SYSTEMS BEHAVIOR

V. Moroz, I. Holovach, Ya. Paranchuk

Lviv Polytechnic National University

vul. St. Bandery, 12, L'viv, 79013, Ukraine. E-mail: vmoroz@lp.edu.ua, tais_tm@ukr.net, yparanchuk@yahoo.com

The review of sampling (discretization) method effect for continuous systems on digital control systems typical structure implementation was proposed in this article. The two basic blocks (real pole and pair of complex-conjugate poles systems) were used as the example in that analyze. Research conducted for analytical and three popular numerical sampling methods. Their influence on number of zeros and poles of the resulted digital transfer function was shown. The root locus plot for the digital models of the continuous system with pair of complex-conjugate poles was build using proposed implementation.

Key words: digital control, discretization method, sampling system, z-transform.

REFERENCES

- Smith J.M.. *Mathematical Modeling and Digital Simulation for Engineers and Scientists*: monogr.; transl. by N.P. Il'ina; Edit. O.A. Chembrovskiy. – M.: Mashinostroyeniye, 1980. – 271 p. [in Russian]
- Moroz V. Digital integrators in the Digital Control Systems // *Proc. of Lviv Polytechnic National University Power Energy and Electromechanic Systems*. – 2006. – №. 563. – PP. 99–104. [in Ukraine]
- Jury E.I. *Theory and Application of the Z-Transform Method*. – New York: John Wiley & Sons, Inc. – 1964. – 327 p.

Стаття надійшла 14.06.2012.

Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Толочко О.І.