УДК 681.513.5

НОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Р. С. Волянский, А. В. Садовой
Днепродзержинский государственный технический университет
ул. Днепростроевская, 2, г. Днепродзержинск, 51918, Украина. E-mail: voliansky@ua.fm

Во вступительной части работы показано использование второго метода Ляпунова для синтеза оптимальных управлений. Рассмотрены особенности этого метода применительно к синтезу электромеханических систем с иррациональной активационной функцией. Обоснована актуальность решаемой задачи. В основной части статьи путем анализа соотношений между коэффициентами функции Ляпунова и уравнения движения изображающей точки оптимальной системы управления обобщенным электромеханическим объектом третьего порядка выполнено нормирование квадратичной функции Ляпунова. Заключительная часть обобщает полученные при исследовании результаты.

Ключевые слова: оптимальное управление, функция Ляпунова, нелинейная активационная функция.

НОРМУВАННЯ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Р. С. Волянський, О. В. Садовой
Дніпродзержинський державний технічний університет
вул. Дніпробудівська, 2, м. Дніпродзержинськ, 51918, Україна. E-mail: voliansky@ua.fm

У вступній частині роботи показано використання другого методу Ляпунова для синтезу оптимальних керувань. Розглянуто особливості цього методу стосовно синтезу електромеханічних систем з ірраціональною активаційною функцією. Обґрунтовано актуальність розв'язуваної задачі. В основній частині статті шляхом аналізу співвідношень між коефіцієнтами функції Ляпунова та рівняння руху зображуючої точки оптимальної системи керування узагальненим електромеханічним об'єктом третього порядку виконано нормування квадратичної функції Ляпунова. Заключна частина узагальнює отримані при дослідженні результати.

Ключові слова: оптимальне керування, функція Ляпунова, нелінійна активаційна функція, збурений рух.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. В настоящее время при исследовании и синтезе систем управления технологическими процессами и электромеханическим оборудованием используется второй метод Ляпунова, основанный на применении функций Ляпунова [1]. Отличительной особенностью таких функций является их положительная определенность, которая достигается в результате определения функций Ляпунова в классе квадратичных форм, удовлетворяющих критерию Сильвестра [2]

$$V = \sum_{i,j=0}^{n} v_{ij}\eta_i\eta_j,\ v_{ij} = v_{ji}, \tag{1}$$

где η_i, η_j – координаты возмущенного движения системы управления, описываемого дифференциальными уравнениями вида

$$p\eta_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\eta_i + m_n U(\eta_i). \tag{2}$$

Использование информации о накопленной в системе управления избыточной энергии позволяет создать управляющее воздействие

$$U(\eta_i) = -f\left(\sum_{i=0}^{n} V_{in}\eta_i\right), \tag{3}$$

рассеивающее эту энергию и устремляющее траекторию движения объекта в начало координат. В выражении (3) функція $f(.)$ – произвольная ограниченная по модулю активационная функция. Определение коэффициентов функции Ляпунова v_{in} в результате решения основного функционального уравнения Беллмана обеспечивает асимптотическую устойчивость такого движения при использовании активационных функций типа “sat” и “sign” [3].

Для систем оптимального управления с иррациональными активационными функциями вследствие существенной нелинейности этих функций влияние положения изображающей точки S на величину формируемых управлений существенно только в области малых значений, ограниченной по модулю условной единицей. В этой области показатели процесса управления в системах с иррациональной активационной функцией сопоставимы с аналогичными показателями релейных систем управления. При больших значениях положения изображающей точки S, обусловленных значительными отклонениями и коэффициентами V_{in}, показатели системы управления хуже аналогичных показателей линейных систем.

Поэтому возникает актуальная задача переопределения коэффициентов функции Ляпунова таким образом, чтобы значение координаты S незначительно превышало единицу.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Рассмотрим обобщенный электромеханический объект третьего порядка, возмущенное движение которого в расширенном фазовом пространстве описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &p\eta_0 = \eta_1; \\ &p\eta_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3; \\ &p\eta_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3; \\ &p\eta_3 = b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3 + m_3U_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Для динамического объекта (5) квадратичная функция Ляпунова (1) примет вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{00}\eta_0^2 + 2V_{01}\eta_0\eta_1 + 2V_{02}\eta_0\eta_2 + \\ &+2V_{03}\eta_0\eta_3 + V_{11}\eta_1^2 + 2V_{12}\eta_1\eta_2 + \\ &+2V_{13}\eta_1\eta_3 + V_{22}\eta_2^2 + 2V_{23}\eta_2\eta_3 + V_{33}\eta_3^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты V_{i3} функции Ляпунова (6) определяются минорами i-ой строки j-го столбца

$$V_{in} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (7)$$

определителя, составленного из коэффициентов системы (5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Для большого класса динамических систем выполняются условия

$$b_{1n} \le b_{2n} \le \ldots \le b_{nn}, \quad (9)$$

которые позволяют утверждать, что

$$V_{0n} \le V_{1n} \le V_{2n} \le \ldots \le V_{nn}. \quad (10)$$

Анализ алгоритма (3) совместно с уравнениями возмущенного движения (5) позволяет сделать вывод о том, что интегральные составляющие изменяются плавно даже при ступенчатом изменении отклонения регулируемой координаты

Этот факт дает возможность в качестве базового выбрать коэффициенты V_{1n} и представить управление (3) объектом (5) следующим образом:

$$U(\eta_i) = -f\left(\eta_1\left(\frac{V_{0n}}{V_{1n}}+1\right) + \sum_{i=2}^{3}\frac{V_{in}}{V_{1n}}\eta_i\right). \quad (11)$$

Воспользовавшись одним из результатов решения задачи аналитического конструирования регуляторов [3], обобщим алгоритм оптимального управления (11)

$$U(\eta_i) = -\frac{\partial V}{\partial \eta_n}. \quad (12)$$

Интегрируя соотношение (12), определим функцию Ляпунова для системы управления, в которой реализуется оптимальный алгоритм (11)

$$\begin{aligned} V_2 &= v(\eta_0, \eta_1, \eta_2) + \\ &+2v_{03}\eta_0\eta_3 + 2\eta_1\eta_3 + 2v_{23}\eta_2\eta_3 + v_{33}\eta_3^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$v_{i3} = \frac{V_{i3}}{V_{13}}. \quad (14)$$

Составляющие $v(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$, не зависящие от отклонения самой внутренней координаты, определяются суммой

$$v(\eta_0, \eta_1, \eta_2) = \sum_{i,j=0}^{2} v_{ij}\eta_i\eta_j, \quad (15)$$

где

$$v_{ij} = \frac{v_{in}v_{jn}}{v_{nn}v_{1n}}. \quad (16)$$

ВЫВОДЫ. Приведенные выкладки задают класс квадратичных функций, производные которых при максимальных абсолютных значениях отклонений η_i определяют управляющие воздействия в открытой области, незначительно превышающих единицу. Это позволяет согласовать нелинейные активационные функции, которые определены в диапазоне $[0,\ldots,1]$, с движением изображающей точки S в течение всего процесса управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Изд-во Тех.-теоретической литературы, 1950. – 472 с.

2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

3. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / А.В. Садовой, Б.В. Сухинин, Ю.В. Сохина. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.

RATIONING LYAPUNOV FUNCTIONS

R. Volyanskiy, A. Sadovoy
Dniprodzerzhinsk State Technical University
ul. Dneprobudovskaya, 2, Dneprodzerzhinsk, 51918, Ukraine. E-mail: voliansky@ua.fm

It's shown usage the 2nd Lyapunov method for the synthesis of optimal controls in the introduction. The features of this method is applied to the synthesis of electromechanical systems with irrational activation function. The urgency of the problem being solved is substantiated. In the common part normalization of the quadratic Lyapunov function are made by analyzing the relations between the coefficients of the Lyapunov function and the equations of the representative point's motion of the optimal generalized electromechanical control systems of 3-rd order object. The final part summarizes the results obtained in the research work.

Key words: optimal control, Lyapunov function, nonlinear activation function.

REFERENCES

1. Lyapunov A.M. *The general problem of stability of the motion.* – M.: Izd. Theoretical-Tech. of the literature, 1950. – 472 p. [in Russian]

2. Barbashin E. *Lyapunov function*. – M.: Nauka, 1970. – 240 p. [in Russian]

3. *Optimal control system of precision electric drives* / A.V. Sadovoy, B.V. Sukhinin, Y.V. Sokhina. – K.: ISIMO, 1996. – 298 p. [in Russian]

Стаття надійшла 6.06.2012.
Рекомендовано до друку
д.т.н., проф. Толочко О.І.