УДК 621.313

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Черный А.П., д.т.н., проф.
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, 39600, г. Кременчуг, Украина
E-mail: apch@kdu.edu.ua
Бердай Абдельмажид
Университет Хассан II Аин Щок
PO Box 8118, Оасис, Касабланка, Марокко
E-mail: a.berdai@gmail.com

Рассмотрены особенности численного интегрирования систем дифференциальных уравнений моделей электромеханических систем. Показано, что наличие нелинейностей и разрывных функций предъявляет особые требования к выбору методов и параметров интегрирования. Выявлены погрешности результатов решения уравнений для традиционно используемых методов интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: электромеханическая система, модель, система дифференциальных уравнений.

Введение. Исследование электромеханических систем (ЭМС) выполняется теоретическими и экспериментальными методами. Теоретические методы базируются на использовании уравнений баланса: энергии, массы импульса, момента и др. Этот подход может достаточно эффективно использоваться для исследования относительно простых систем, которые состоят из хорошо известных и исследованных элементов. Мощным средством экспериментальных исследований являются исследования на математической модели – компьютерное моделирование, обеспечивающее оперативный расчет установившихся и переходных режимов работы ЭМС, анализ во временной и в частотной областях, в штатных и нештатных эксплуатационных режимах. Математическая модель системы занимает центральное место в процессе математического исследования. При этом модели, как правило, записывают в виде систем дифференциальных уравнений (СДУ). От адекватности модели и выбора метода интегрирования СДУ целиком зависит получаемый результат.

Анализ предыдущих исследований. Моделирование и исследование электромеханических систем и объектов на ЭВМ очень прочно вошло в практику исследований [1, 2, 3], даже иногда заменяя теоретические исследования или анализ на основе аналитически полученных выражений. Постепенно исследователи отходят от упрощенных математических моделей, а рассматривают модели на основе дифференциальных или интегральных уравнений, учитывающих все электрические контуры и различные формы магнитного или электромагнитного взаимодействия. Сложность модели при этом ограничивается пониманием физической природы объекта и возможностями компьютерной программы для моделирования.

Еще 10-15 лет назад при моделировании – проведении вычислительного эксперимента – исследователь выполнял ряд обязательных процедур:

–построение математической модели (ММ) процесса или объекта;

–выбор (построение) численного метода решения уравнений ММ;

–программная реализация численного метода;

–тестирование и отладка программы;

–проведение необходимых вычислений;

–анализ результатов и, возможно, коррекция модели.

С расширением использования средств вычислительной техники в исследовании ЭМС объем аналитической работы ничуть не уменьшился. Произошло его перераспределение. Если раньше вся аналитика была условно «равномерно» распределена на этапах синтеза и анализа математических моделей электромеханических преобразователей энергии, то теперь все более концентрируется на этапе синтеза модели. Именно сложность математического описания моделей не позволяет использовать аналитические методы исследования ЭМС на этапе анализа и требует привлечения компьютерных технологий.

В этом случае эффективным является использование мощных чисто математических и объектно-ориентированных пакетов программ, таких, как, например, математический пакет Mathematica или MatLab – интерактивная система для выполнения инженерных и научных расчетов, Mathcad – среда для выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, Model Vision Studium – компьютерная лаборатория для моделирования и исследования сложных динамических систем, WorkBench – пакет разработки электрических схем и другие, которые позволяют автоматизировать процессы синтеза и анализа исследуемых объектов.

Цель работы. Анализ особенностей численного интегрирования систем дифференциальных уравнений при исследовании моделей электромеханических систем.

Материал и результаты исследований. Моделирование процессов в динамических системах сводится к численному решению задачи Коши. Практика свидетельствует, что реальные электромагнитные и электромеханические процессы в ЭМС, как привило, описываются жесткими СДУ. Вместе с тем достаточно часто встречаются быстро осциллирующие системы, которые описывают высокочастотные колебания, а также локально-неустойчивые системы, в решении которых участки с расходящимися процессами чередуются с более длительными стабильными участками. Перечисленные типы задач выдвигают различные требования к методам интегрирования.

При интегрировании жестких систем необходимо обеспечить быстрое затухание жестких составляющих, для этого используют неявные A- или L-устойчивые методы [4, 6]. Такие методы подавляют все составляющие решения, которые отвечают большим по модулю собственным значениям (если только шаг интегрирования принят не очень малым). Поэтому они плохо приспособлены для решения осциллирующих и локально-неустойчивых систем. Для интегрирования осциллирующих систем необходимо применять специальные методы, которые обеспечивают правильный характер огибающей колебательного решения. Специальные методы следует применять также для решения жестких локально-неустойчивых систем.

Трудности возникают и во время интегрирования систем с разрывной правой частью. Для правильного решения таких задач необходимо уменьшать шаг интегрирования в окрестности точки разрыва, который выдвигает повышенные требования к процедуре управления величиной шага, так как здесь возможны даже псевдо зависания решения по причине значительного уменьшения шага.

Таким образом, для эффективного и качественно верного решения системы уравнений необходимо установить характер задачи и выбрать наиболее пригодный метод.

Современные моделирующие программные комплексы, как правило, содержат наборы методов, которые позволяют решать задачи различных типов. Однако характер задачи может изменяться в процессе решения или при переходе от одной переменной к другой. Для решения таких задач могут быть эффективными адаптивные методы [7, 8], расчетные формулы которых настраиваются на систему, которую интегрируют, применяя для этого оценки некоторых параметров (например, собственные значения якобиана). Особенно перспективными являются явные адаптивные методы, которые не требуют во время своей реализации вычисления матрицы Якоби и решения алгебраических уравнений.

Большинство численных методов можно представить в виде зависимости:

$$y_{i+1} = \varphi\left(y_{i-r}, y_{i-r+1}, ..., y_i, y_{i+1}, ..., y_{i+s}\right). \qquad (1)$$

Функция φ определяет вычислительную схему метода. Если $r = 0$ и $0 \le s \le 1$, то численный метод называют одношаговым, а если $r \ge 1$ или $s > 1$, то многошаговым.

Многошаговые и одношаговые методы называют явными, если $s = 0$, и неявными - при условии $s = 1$. Если $s > 1$, многошаговые методы называют методами с предсказанием.

Основным вопросом при выборе численного метода является оценка точности приближенных решений. Выделяют два основных источника ошибки данных решений:

– ошибка аппроксимации, возникающая в результате замены дифференциального уравнения конечно-разностной аппроксимацией;

– ошибка округления, возникающая при вычислении $y_1, y_2, ..., y_n$.

Критерием точности различных методов, применяемых на практике, является, насколько расчетная формула метода согласовывается с разложением в ряд Тейлора (до членов порядка h^p, где p – порядок точности метода).

Современные математические пакеты применяют комплекс методов численного решения СДУ, например, в MATLAB и Simulink реализованы 7 методов с автоматическим выбором шага и 5 методов с постоянным шагом интегрирования:

–методы с постоянным шагом: *ode5* – метод

Рунге-Кутта 5-го порядка (*Dormand-Prince formula*); *ode4* – метод Рунге-Кутта 4-го порядка (*fourthe-order Runge-Kutta formula*); *ode3* – метод Рунге-Кутта 3-го порядка (*Bogacki-Shampine formula*); *ode2* – модифицированный метод Ейлера (*improved Euler's formula / Heun's method*); *ode1* – метод Ейлера (*Euler's method*);

–методы с переменным шагом: *ode45* - комбинированный метод Рунге-Кутта (4-5)-го порядка с автоматическим выбором шага для решения нежестких СДУ; *ode23* - комбинированный метод Рунге-Кутта (2-3)-го порядка с автоматическим выбором шага, для решения нежестких и слабожестких СДУ; *ode113* - многошаговый метод Адамса-Моултона-Бешфорта (метод прогноза и коррекции переменного порядка) для решения нежестких СДУ; может быть более эффективным, чем *ode45*, при высокой точности; *ode15s* - многошаговый метод (1-5)-го порядка (по умолчанию 5-го), который базируется на формулах численного дифференцирования (*NDFs*), но может использовать и формулы обратного дифференцирования (*BDFs*) в соответствии с методом Гира, направленный на решение жестких СДУ; *ode23s* - одношаговый метод, который базируется на модифицированной формуле Розенброка 2-го порядка; для некоторых жестких СДУ при невысокой точности оказывается более эффективным, чем *ode15s*; *ode23t* - метод трапеций с использованием «свободного» интерполянта для решения умеренно жестких СДУ; *ode23tb* - комбинированный метод, который использует на первом этапе формулу трапеций, а на втором - формулы обратного дифференцирования второго порядка; как и метод *ode23s*, может быть при невысокой точности более эффективным, чем *ode15s*, для решения жестких СДУ.

Если модель имеет только дискретные переменные состояния или совсем не имеет динамических звеньев, то для моделирования используют метод *discrete* с фиксированным или переменным шагом. Причем переменный шаг выбирают, когда модель имеет в своем составе дискретные динамические звенья с различными периодами прерывания или когда нужно фиксировать моменты времени пересечения некоторыми сигналами нулевого уровня.

Данный набор методов позволяет эффективно решать различные задачи, но при этом возникает проблема выбора соответствующего метода и правильного задания его параметров. Обоснованные рекомендации по выбору того или другого метода можно давать только на основе решения задач различных типов. Вопрос сравнения решения ОДУ на тестовых задачах рассматривался в монографиях [4, 5].

Как правило, в тестовых задачах проводится сравнение методов решения ОДУ системой MATLAB для задач трех типов: нежестких, жестких и разрывных. Нежесткие задачи являются самыми легкими и успешно решаются всеми методами с автоматическим выбором шага. Для решения жестких и нежестких задач конкретные рекомендации приведены в [3, 4, 5]. Однако необходимо учитывать, что часто в правые части СДУ моделей ЭМС входят напряжения на выходе преобразователей энергии: тиристорных или транзисторных. Эти сигналы характеризуются наличием разрывов первого рода в моменты времени, в которые происходит коммутация ключей [9, 10]. Это позволяет утверждать, что СДУ моделей ЭМС относятся к разрывным равнениям.

Если модель ЕМС записана в матричной форме, то уравнение модели имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gz + f(x),$$

где x - вектор состояния; A - матрица состояния; u - вектор управления; B - матрица управления; z - вектор возмущения; G - матрица возмущения; $f(x)$ - вектор нелинейных функций.

Вектор $f(x)$ характеризует нелинейности элементов, нелинейные связи в системе управления, нелинейные функции угловой частоты вращения вала, ускорение и тому подобное, например:

– характеристика зоны нечувствительности

$$\gamma_f = \begin{cases} 0 \quad при \quad |\gamma| \le \gamma_0; \\ \gamma - \gamma_0 sign(\gamma) \quad при \quad |\gamma| > \gamma_0, \end{cases}$$

где γ, γ_f, γ_0 - сигналы на входе и выходе, ширина зоны нечувствительности;

–характеристика момента сопротивления типа «сухое трение»

$$\mu_f = \mu sign(\nu),$$

где μ, μ_f, ν - относительный момент сопротивления на входе и выходе, относительная угловая частота вращения вала.

При использовании методов интегрирования с переменным шагом происходит значительное уменьшение шага интегрирования.

Как пример рассмотрим уравнение, аналогичное осциллятору Ван-дер-Поля, которое содержит разрывную функцию

$$\frac{d^2y}{dt^2} = sign(1-|y|)\frac{dy}{dt} - y, \tag{2}$$

и решаем его на интервале $[0;20]$ при начальных условиях $y_0 = 2.5$, $\frac{dy_0}{dt} = 0$ методами с переменным шагом интегрирования для значений точности $10^{-8}..10^{-2}$. При этом абсолютная погрешность принималась *Atol=Tol*. Для анализа фиксировалось количество точек расчета соответствующим методом на заданном интервале. Данные расчетов приведены в табл. 1.

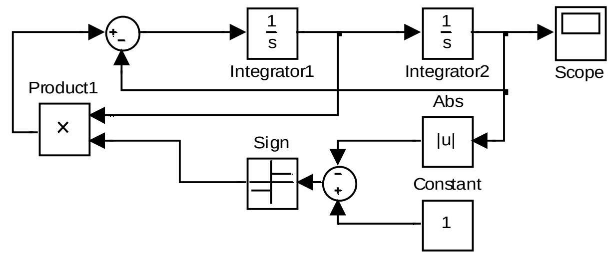


Рисунок 1 – Структурная схема модели расчета уравнения (2)

Таблица 1 – Количество точек расчета численными методами от порядка точности

	Количество точек расчета						
Tol	**Ode45**	**Ode23**	**Ode113**	**Ode15s**	**Ode23s**	**Ode23t**	**Ode23tb**
10^{-2}	82	82	143	137	83	139	81
10^{-3}	82	101	198	212	120	218	126
10^{-4}	82	180	285	327	216	354	234
10^{-5}	100	350	367	428	428	729	405
10^{-6}	137	717	435	533	887	1461	848
10^{-7}	211	1507	522	692	1880	3032	2143
10^{-8}	308	3220	599	899	4014	6094	4584

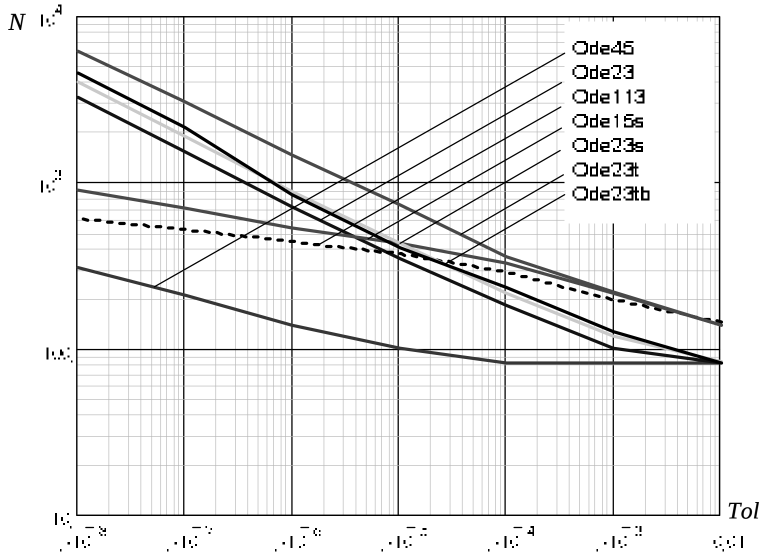


Рисунок 2 – Количество точек расчета численными методами при различном порядке точности

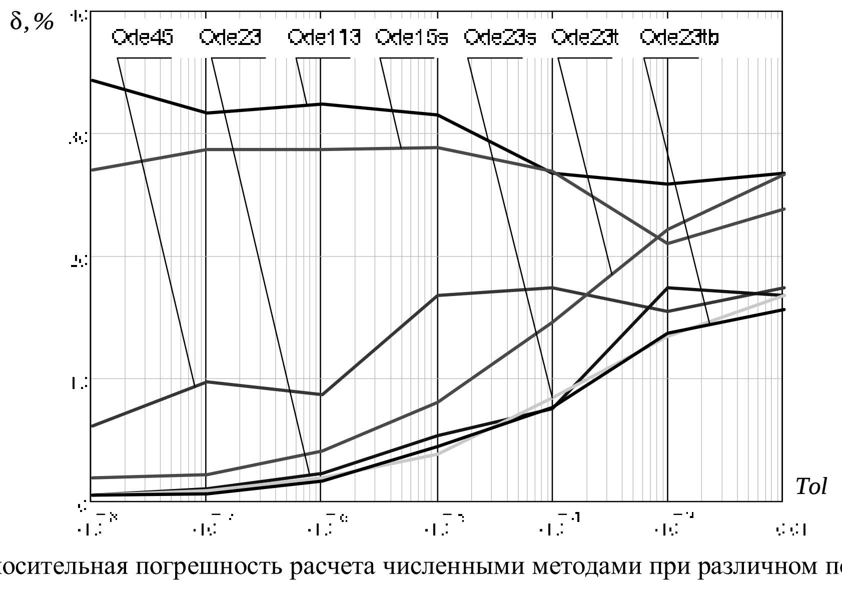


Рисунок 3 – Относительная погрешность расчета численными методами при различном порядке точности

Такое большое отличие в количестве точек расчета требует дополнительных исследований эффективности решения уравнения. Достижение заданной точности не позволяет утверждать о точности решения, ибо заданная точность - это лишь разница между смежными данными решения.

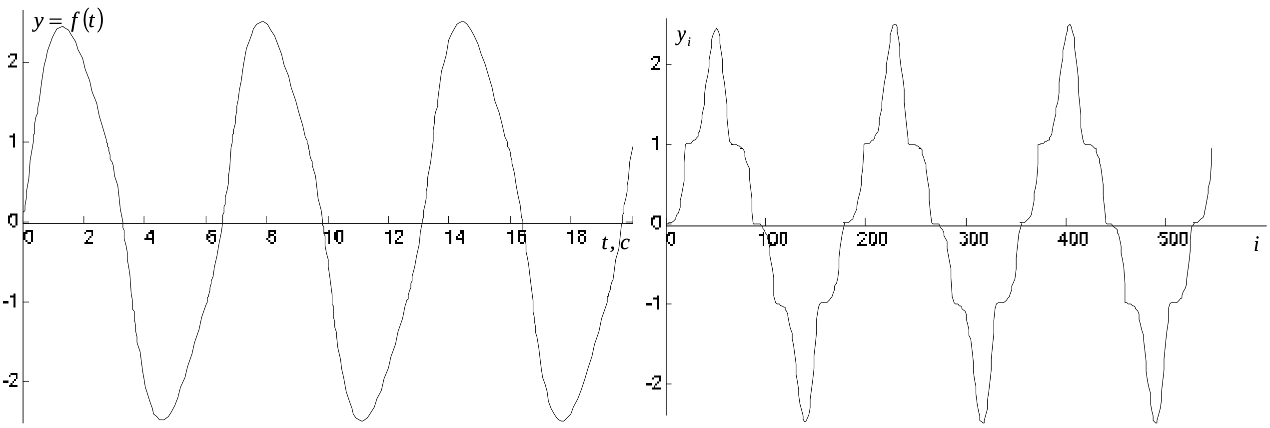
Показателем эффективности решения уравнения может служить, например, относительная погрешность в конце интервала интегрирования [8]. Такой подход, однако, не дает полной информации о погрешностях вдоль всего интервала, поэтому был предложен метод оценки среднеквадратичного значения функции решения Y на всем интервале интегрирования Y_n, рассчитанная с точностью 10^{-18} и принятая в качестве точной, где $Y = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2}$. Тогда $\delta = \frac{Y_n - Y}{Y_n} 100$.

Результаты исследований показывают (табл. 2.), что относительная погрешность может достигать до 34% от точного значения.

Таблица 2 – Относительная погрешность расчета численными методами от порядка точности

	Относительная погрешность расчета δ , %						
Tol	**Ode45**	**Ode23**	**Ode113**	**Ode15s**	**Ode23s**	**Ode23t**	**Ode23tb**
10^{-2}	17,421	16,734	26,762	23,84	16,791	26,59	15,587
10^{-3}	15,473	17,421	25,788	20,974	13,41	22,12	13,639
10^{-4}	17,421	7,507	26,762	26,819	8,367	14,499	7,679
10^{-5}	16,791	5,33	31,461	28,825	3,782	7,966	4,47
10^{-6}	8,711	2,235	32,378	28,711	1,891	4,069	1,662
10^{-7}	9,685	0,974	31,633	28,711	0,86	2,12	0,63
10^{-8}	6,132	0,401	34,269	26,934	0,458	1,891	0,458

Значительное отличие количества точек результатов расчета при использовании методов интегрирования с переменным шагом интегрирования делает неудобным использование методов анализа на четко определенном интервале из-за появления неравномерной сетки отсчетов.



а) б)

Рисунок 4 - Отображение результатов расчета уравнения (2):

а) – как функции времени $y(t)$; б) – как дискретной функции y_i

Кроме того, эту особенность необходимо учитывать и при визуальной оценке результатов расчета. Например, на рис.4 показано отображение результатов расчета уравнения (2) по схеме (рис.1) как функции времени $y = f(t)$ и как дискретной величины $y_i, i = \overline{0..N}$.

Выводы. Повышение точности в методах, предназначенных для решения жестких СДУ, позволяет снизить процент погрешности, но его значения находятся на уровне 1,8..0,5%. Такие данные получены лишь для уравнения 2-го порядка. Для ЭМС, модели которых содержат 5-7 уравнений, погрешность будет значительно больше.

Выполненный анализ указывает, на необходимость обоснованного выбора численного метода интегрирования СДУ в зависимости от их структуры для получения адекватных качественных решений и достаточно низких погрешностей расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карлащук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC / В. И. Карлащук. – М.: Салон-Р, 1999. – 590 с.

2. Разевиг В. Д. Система сквозного проектирования электронных устройств DesighnLab 8.0 / В. Д. Разевиг. – М.: Солон, 1999. – 698 с.

3. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное

моделирование полупроводниковых систем в МАТЛАВ 6.0: Учебное пособие / С. Г. Герман-Галкин.
– СПб.: КОРОНА принт, 2001. – 320 с.

4. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

5. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. –
М.: Мир, 1999. – 685 с.

6. Скворцов Л. М. Адаптивные методы численного интегрирования в задачах моделирования динамических систем / Скворцов Л. М. // Изв. РАН. Теория и системы управления, 1999. – № 4.
– С. 72-78.

7. Скворцов Л. М. Явные адаптивные методы численного решения жестких систем / Л. М. Скворцов // Математическое моделирование. – Т. 12, 2000. – № 2. – С. 97-107.

8. http://www.dm.uniba.it/~testset/

9. Сидоренко В. Н. Исследование погрешностей определения тока, напряжения и мощности электрических приводов при их диагностике. / В. Н. Сидоренко, А. П. Черный. Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: наукові праці КДПУ.- Кременчук: КДПУ, 2003. – Вип.2(19), Т. 2. – С. 219-222.

10. Сидоренко В. Н. Повышение точности определения электромагнитных параметров асинхронных двигателей с использованием алгоритмов коррекции сигналов / В. Н. Сидоренко, А. П. Черный, А. П. Калинов. Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Вып. 3/2006 (38). – Ч. 2. – С. 88-92.

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Чорний О.П., д.т.н., проф.
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, 39600, м. Кременчук, Україна
E-mail: apch@kdu.edu.ua
Бердай Абдельмажид
Вища національна школа електромеханіки (ENSEM)
Університет Хассан II Аін Щок
PO Box 8118, Оасіс, Касабланка, Марокко
E-mail: a.berdai@gmail.com

Розглянуті особливості чисельного інтегрування систем диференційних рівнянь моделей електромеханічних систем. Показано, що наявність нелінійностей і розривних функцій пред'являє особливі вимоги до вибору методів і параметрів інтегрування. Виявлені похибки результатів рішення рівнянь для традиційно застосовуваних методів інтегрування систем диференційних рівнянь.

Ключові слова: електромеханічна система, модель, система диференційних рівнянь.

FEATURES OF NUMERAL INTEGRATION OF THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF MODELS OF THE ELECTROMECHANICS SYSTEMS

Chorniy O., Doc. Sc. (Tech.), Prof.
Kremenchuk Mykhaylo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine
E-mail: apch@kdu.edu.ua
Berdai Abdelmajid, Prof.
University Hassan II AIN Schok
PO Box 8118, Oasis, Casablanca, Morocco
E-mail: a.berdai @ gmail.com

Features of numeral integration of the systems of differential equalizations of models of the electromechanics systems are considered. It is shown, that the presence of nonlinear and bursting functions produces the special requirements to the choice of methods and integration parameters. Errors of results of decision of equalizations for the traditionally used methods of integration of the systems of differential equalizations are shown.

Key words: electromechanics system, model, system of differential equalizations.