

УДК 621.313.332

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

**В. А. Бобер**

НТУУ "Киевский политехнический институт"

просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина. E-mail: bvictor@ua.fm

Разработана специальная математическая модель электрической машины переменного тока, пригодная для исследования машин с переменными параметрами в динамических режимах с высокой точностью. Сопоставлены результаты расчетов пуска асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором по разработанной и известной моделям. Математическая модель электрической машины легко адаптируется в сложные модели электромеханических и электромашинно-вентильных систем.

**Ключевые слова:** математическая модель, асинхронный, двигатель.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МАШИНИ ЗМІННОГО СТРУМУ

**В. А. Бобер**

НТУУ "Київський політехнічний інститут"

просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056, Україна. E-mail: bvictor@ua.fm

Розроблено спеціальну математичну модель електричної машини змінного струму, яка придатна для дослідження машин зі змінними параметрами у динамічних режимах з високою точністю. Порівняно результати розрахунків пуску асинхронного двигуна з короткозамкнутим ротором за розробленою та відомою моделями. Математична модель електричної машини легко адаптується в складні моделі електромеханічних та електромашинно-вентильних систем.

**Ключові слова:** математична модель, асинхронний, двигун.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Бурное развитие полупроводниковой техники оказывает существенное влияние на модернизацию старых и появление новых электрических машин (ЭМ), электромеханических и электромашинно-вентильных систем (ЭМС, ЭМВС). Перед исследователями поставлена задача по совершенствованию методов расчета как ЭМС, ЭМВС в целом, так и их отдельных компонентов [1, 3, 7, 8, 10–12]. Более жесткие требования предъявляются к точности расчета электрических машин в статических и динамических режимах. Поэтому совершенствование математических моделей электрических машин является актуальным.

В ряде математических моделей реальную трехфазную электрическую машину преобразовывают в "обобщенную электрическую машину" [1, 3, 8, 12]. Это, с одной стороны, облегчает моделирование электромагнитных процессов машины, а с другой – усложняет анализ всей ЭМС в целом.

В работах [1, 3, 8, 11] решение систем дифференциальных уравнений математических моделей ЭМ проводится в следующей последовательности: определяются входные переменные, потенциалы узлов, производные токов, определяются токи ветвей. При такой последовательности неизбежна погрешность расчета, нарастающая с увеличением времени счета. Кроме того, величина погрешности зависит от выбранного шага интегрирования и метода расчета (метод Эйлера, метод последовательного типа АБВ [1], метод Рунге-Куты и т.д.). Увеличение шага приводит к неустойчивости расчета, уменьшение – к затратам машинного времени. В математических моделях при большом количестве шагов накапливается погрешность [3], которая приводит к неустойчивому решению поставленной задачи. Для повышения устойчивости применяют разные методы. Одним из методов является "метод квазикомбинированных схем и узловых уточнений токов" [4], основанный на моделировании разрыва вентильных веток при переходе тиристора в закрытое состояние и на переопределении токов на каж-

дом шаге интегрирования.

В работе [2] предложена простая, универсальная математическая модель ЭМ. Всесторонние исследования модели ЭМ, встроенной в сложные модели ЭМС и ЭМВС, показали устойчивую работу и точность результатов расчетов [2, 5].

Целью настоящей работы является описание новой математической модели ЭМ, сопоставление результатов расчета динамических режимов работы асинхронного двигателя (АД) с расчетами АД по модели в пакете Simulink MatLab [9].

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Рассмотрим электрическую схему цепи переменного тока, состоящую из  $n$ -ветвей и  $m$ -узлов (рис. 1). Каждая ветвь схемы представляет собой RL-цепи с источником ЭДС или без него.

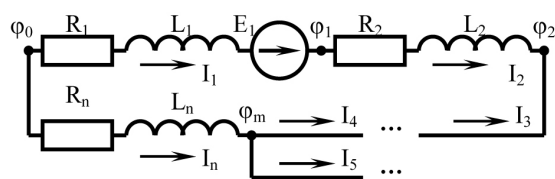


Рисунок 1 – Электрическая схема цепи переменного тока

Запишем для каждой ветви схемы уравнение напряжений, согласно второму закону Кирхгофа:

Для RL-цепи с ЭДС

$$R_1 I_1 + p(L_1 I_1) + E_1 = \phi_0 - \phi_1, \quad (1)$$

где  $p$  – оператор дифференцирования;  $\phi$  – потенциал узла;  $R$  – активное сопротивление ветви;  $L$  – индуктивность ветви;  $I$  – ток ветви;  $E$  – ЭДС ветви.

Для RL-цепи

$$R_2 I_2 + p(L_2 I_2) = \phi_1 - \phi_2. \quad (2)$$

Система уравнений для всей схемы имеет вид:

$$\begin{cases} R_1 I_1 + \sum_1^n L_{1n} p I_n + \sum_1^n p L_{1n} I_n + E_1 = \phi_0 - \phi_1; \\ R_2 I_2 + \sum_1^n L_{2n} p I_n + \sum_1^n p L_{2n} I_n + E_2 = \phi_1 - \phi_2; \\ \dots \\ R_n I_n + \sum_1^n L_{nn} p I_n + \sum_1^n p L_{nn} I_n + E_n = \phi_0 - \phi_m. \end{cases} \quad (3)$$

Перепишем уравнение (3) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p I_1 \\ p I_2 \\ \dots \\ p I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p L_{11} & p L_{12} & \dots & p L_{1n} \\ p L_{21} & p L_{22} & \dots & p L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p L_{n1} & p L_{n2} & \dots & p L_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} + K'_E \times \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_k \end{bmatrix} = K'_\phi \times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

или в короткой записи

$$R' \times I + L' \times pI + pL' \times I + K'_E \times E = K'_\phi \times \phi, \quad (5)$$

где  $K'_E$  – матрица коэффициентов ЭДС размера  $n \times k$  ( $n$  – количество ветвей схемы,  $k$  – количество ЭДС в схеме);  $K'_\phi$  – матрица коэффициентов потенциалов размера  $n \times m$  ( $m$  – количество узлов в схеме).

Каждая ячейка матрицы  $K_E$  принимает одно из значений: "0", "1", "- 1". Если  $n$ -ая ветвь имеет  $k$ -ую ЭДС и эта ЭДС направлена согласно условному направлению тока, то ячейка  $[n:k]$  принимает значение "1"; если противоположно направлена, то "- 1". Все остальные ячейки принимают значение "0".

Каждая ячейка матрицы  $K_\phi$  может принимать одно из значений: "0", "1", "- 1". Если  $m$ -ый узел является началом ветви, то ячейка  $[n:m]$  принимает значение "1"; если концом ветви, то "- 1". Все остальные ячейки принимают значение "0".

Согласно первому закону Кирхгофа, для узла схемы можно составить уравнения вида:

$$\sum_1^n i_n = 0. \quad (6)$$

Для схемы (рис. 1) можно составить систему уравнений в матричном виде:

$$K'_i \times [I] = [0], \quad (7)$$

где  $K'_i$  – матрица коэффициентов тока размера  $[m \times n]$ .

Каждая ячейка матрицы  $K'_i$  может принимать одно из значений: "0", "1", "- 1". Если ток  $n$ -ой ветви "выходит" из  $m$ -го узла, то ячейка  $[m,n]$  принимает значение "1"; если – "выходит", то "- 1". И если  $n$ -ый ток не принадлежит  $m$ -му узлу, то ячейка  $[m,n]$  принимает значение "0".

Таким образом, мы имеем два матричных уравнения (5) и (7) или  $n$  уравнений для ветвей схемы и  $m$  уравнений для узлов схемы. В этих уравнениях неизвестными являются:  $m$  – потенциалов узлов ( $\phi$ ),  $n$  – токов ветвей ( $I$ ),  $n$  – производных токов ветвей ( $pI$ ). То есть имеем  $m+2n$  неизвестных, а уравнений  $m+n$ . Для решения систем дифференциальных уравнений (5) и (7) необходимо составить еще  $n$  уравнений. Применяем метод Эйлера (можно применить и любой другой метод решения). Согласно методу Эйлера, для тока ветви, имеющую индуктивность, составляем уравнение вида

$$I_v + h p I_v = I_{v+1}, \quad (8)$$

где  $h$  – шаг интегрирования,  $v$  – номер шага интегрирования.

Для всей схемы составляем уравнение в матричном виде

$$K'_{i0} \times I_0 + h \cdot K'_{pi} \times pI = K_{ii} \times I, \quad (9)$$

где  $K'_{i0}$ ,  $K'_{pi}$ ,  $K_{ii}$  – единичные диагональные матрицы размером  $[n \times n]$ ;  $I_0$  – матрица токов предыдущего шага интегрирования.

Любую схему, состоящую из  $n$  – ветвей, можно описать тремя матричными уравнениями (5), (7) и (9), объединив их и перенеся известные величины в левую часть, а неизвестные – в правую часть системы уравнений, и получим одну систему матричных уравнений [2].

$$\begin{cases} R' \times I_0 + pL' \times I_0 + K'_E \times E = K'_\phi \times \phi - L' \times pI; \\ 0 = K'_i \times I; \\ K'_{i0} \times I_0 = K_{ii} \times I - h \cdot K'_{pi} \times pI. \end{cases} \quad (10)$$

Объединим систему матричных уравнений (10) в одно матричное уравнение, представив матрицы неизвестных  $\phi$ ,  $I$ ,  $pI$  как одну матрицу неизвестных  $N$ :

$$N = \begin{bmatrix} \phi \\ I \\ pI \end{bmatrix} \text{ размера } \begin{bmatrix} [m \times 1] \\ [n \times 1] \\ [n \times 1] \end{bmatrix} = [(m+n+n) \times 1].$$

Матрицы коэффициентов перед матрицами  $\phi$ ,  $I$ ,  $pI$  преобразуем таким образом, чтобы выполнялись правила матричного вычисления и они соответствовали правой части системы уравнений (10), матрицы  $R'$ ,  $pL'$ ,  $K'_E$ ,  $K'_{i0}$  – левой части системы уравнений (10).

Матрицы  $I_0$ ,  $E$  не изменяются ( $I_0=[n \times 1]$ ,  $E=[k \times 1]$ ). Система (10) принимает вид:

$$R \times I_0 + pL \times I_0 + K_{i0} \times I_0 + K_E \times E = K_\phi \times N + K_i \times N - h \cdot K_{pi} \times N - L \times N. \quad (11)$$

Решение матричного уравнения (11):

$$N = (K_\phi + K_i - h \cdot K_{pi} - L)^{-1} \times (R \times I_0 + pL \times I_0 + K_{i0} \times I_0 + K_E \times E). \quad (12)$$

Уравнение (12) является решением электрической части математической модели ЭМ. Это решение устойчиво на всем временном интервале исследования математической модели ЭМ, т.к. в этом решении исключается нарастающая погрешность из-за одновременного определения всех переменных, погрешность токов при этом минимальна.

Механическая часть математической модели ЭМ:

$$\begin{cases} \frac{p(M_{yi} - M_{\bar{m}i\delta})}{J} = \frac{d\omega}{dt}; \\ \omega_0 + h \frac{d\omega}{dt} = \omega; \\ \gamma_0 + h\omega = \gamma. \end{cases} \quad (13)$$

В матричном виде уравнение (13) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 \\ 0 & -h & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{d\omega}{dt} \\ \omega \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \cdot (M_{эм} - M_{comp}) \\ J \\ \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

или

$$K_M \times M = M_0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) имеет вид:

$$M = (K_M)^{-1} \times M_0. \quad (16)$$

При наличии переменных параметров (R, L) они определяются на каждом шаге интегрирования. Такими переменными параметрами могут быть взаимные индуктивности электрических машин, прямые и обратные сопротивления диодов, тиристоров и др.

В частности, электрическая машина, входящая в ЭМС, при использовании данной математической модели моделируется как вращающаяся машина в фазных координатах, каждая обмотка которой описывается дифференциальным уравнением [6]:

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\Psi_k}{dt} = R_k i_k + \sum_{n=1}^s \left( L_{kn} \frac{di_n}{dt} + i_n \Omega \frac{dL_{kn}}{d\gamma} \right), \quad (17)$$

где  $u_k$  – напряжение k-ой обмотки;  $R_k$  – активное сопротивление обмотки;  $L_{kn}$  – взаимные индуктивности между обмотками;  $i$  – ток обмотки;  $\Omega$  – угловая скорость.

Взаимные индуктивности в уравнении (17) являются функцией угла поворота  $L=f(\gamma)$ , а также зависят от насыщения, поэтому на каждом шаге интегрирования необходимо их определять. Насыщение определяется по модулю намагничивающего тока.

Алгоритм расчета математической модели асинхронного двигателя представлен на рис. 2 и заключается в следующем.

1. Начало программы.
2. Ввод исходных данных: описание схемы (узлов и ветвей); описание элементов схемы; параметры схемы.
3. Формирование начальных условий, присвоение переменным начальных значений.
4. Формирование матриц коэффициентов токов, производных токов, потенциалов, ЭДС, исходя из описания схемы.
5. Проверка выполнения условия  $t \leq t_k$ , где  $t_k$  – конечное время счета. Если условие выполняется, то вычисление продолжается, если не выполняется, то осуществляется переход к оператору 11.
6. Определение переменных параметров.
7. Формирование матриц параметров.
8. Вычисление неизвестных величин.
9. Осуществляется запись результатов интегрирования на v-ом шаге в память.
10. Присвоение переменной времени t нового значения.
11. Оператором 11 производится вывод результатов расчета.
12. Окончание процедуры вычисления.

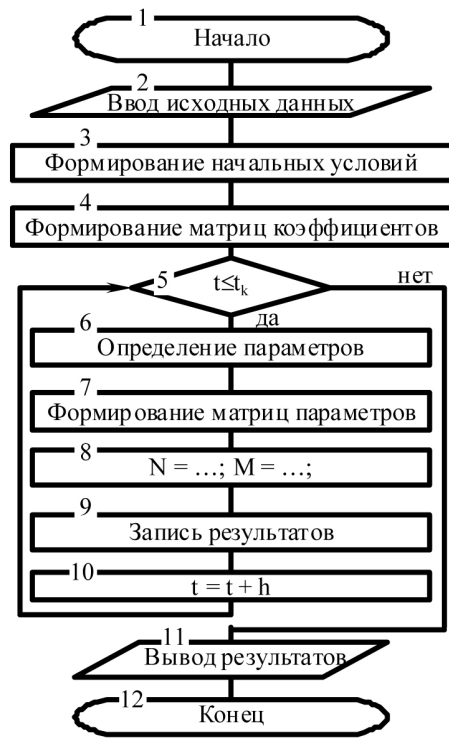


Рисунок 2 – Алгоритм расчета математической модели электрической машины

В соответствии с указанным алгоритмом, составлена математическая модель расчета АД (модель "AD"), принципиальная электрическая схема которой показана на рис. 3. Модель написана на m-языке в среде MatLab.

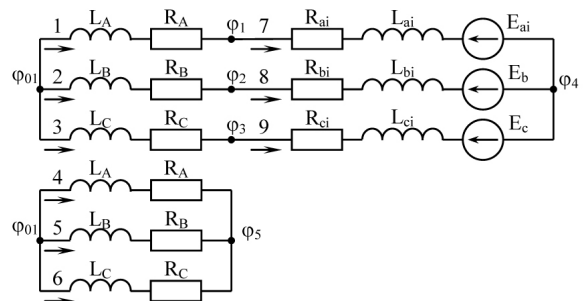


Рисунок 3 – Модель «AD»

Сопоставим результаты расчета пуска трехфазного АД по модели "AD" [2] и модели в пакете Simulink MatLab [9], электрическая схема которой показана на рис. 4.

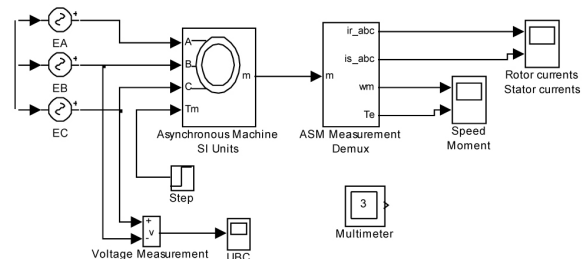


Рисунок 4 – Схема модели АД в пакете Simulink MatLab

Параметры моделей АД приведены в табл. 1.  
 На рис. 5, 6 приведены временные диаграммы пуска АД, рассчитанные по двум моделям:  
 а, б – токи статора и ротора;  
 с – угловая скорость АД;

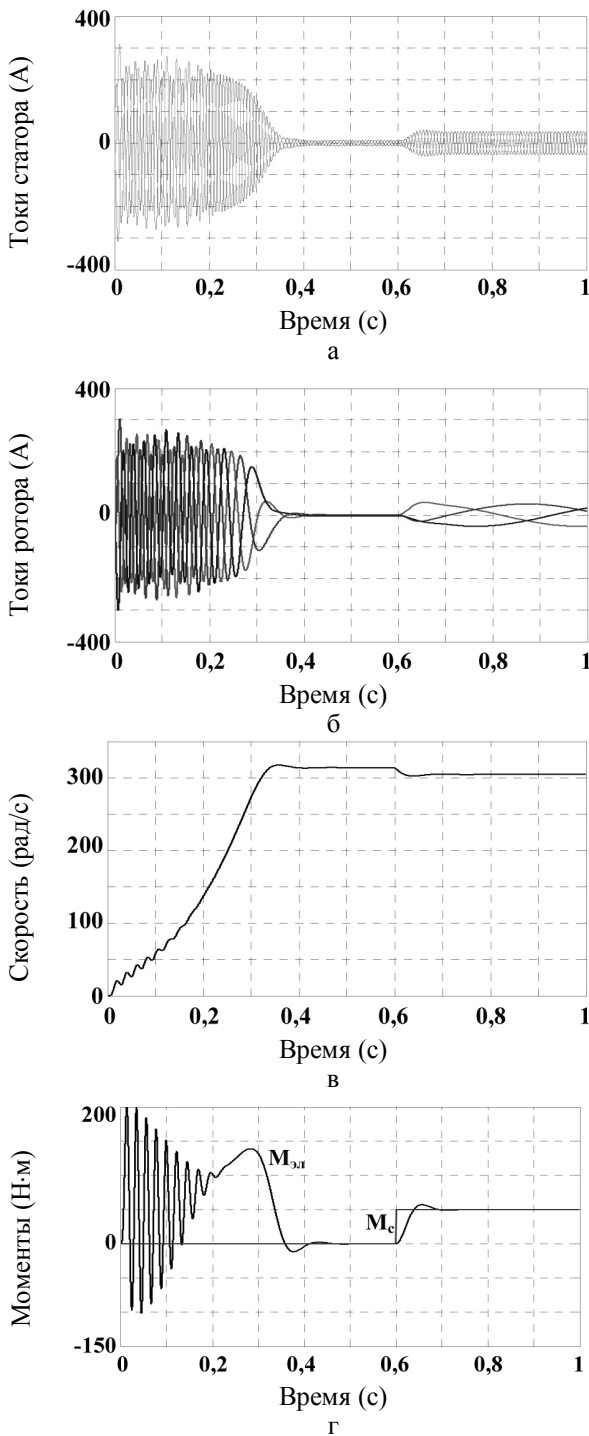


Рисунок 5 – Результаты расчета модели «АД»

$d$  – электромагнитный момент  $M_{эл}$  и момент сопротивления  $M_c$ .  
 Как видно из рисунков, результаты расчета пуска АД по двум моделям близки.

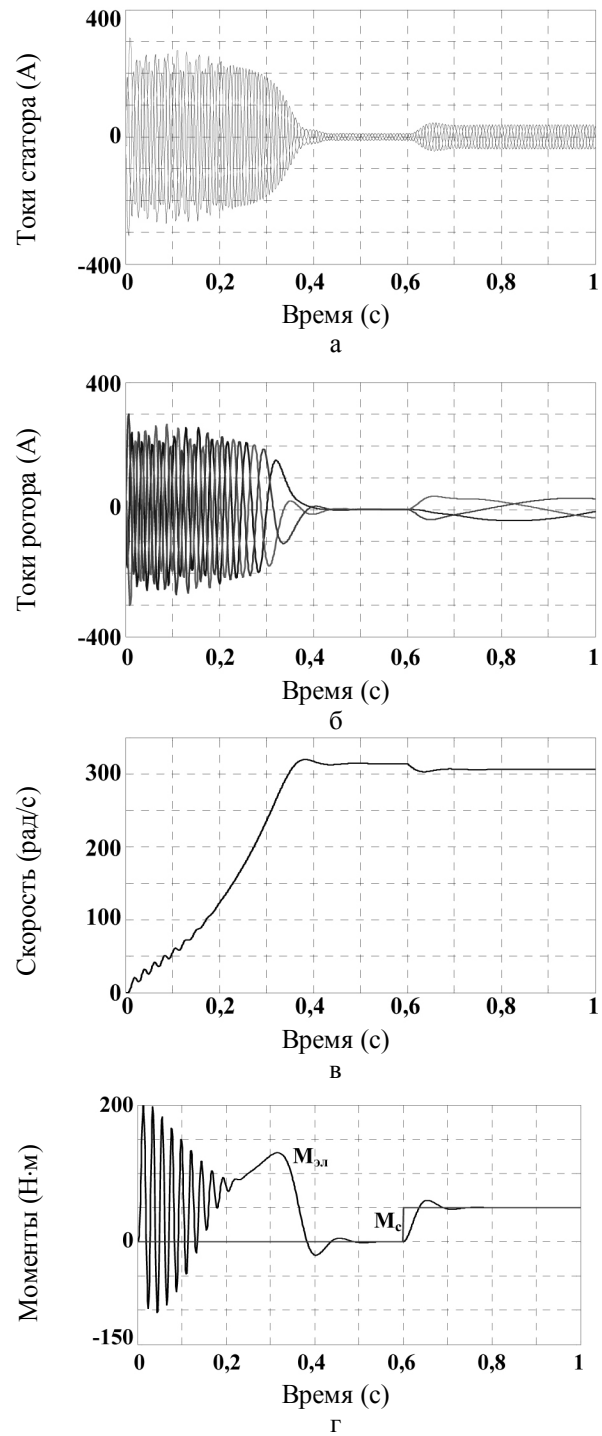


Рисунок 6 – Результаты расчета модели АД в пакете Simulink MatLab

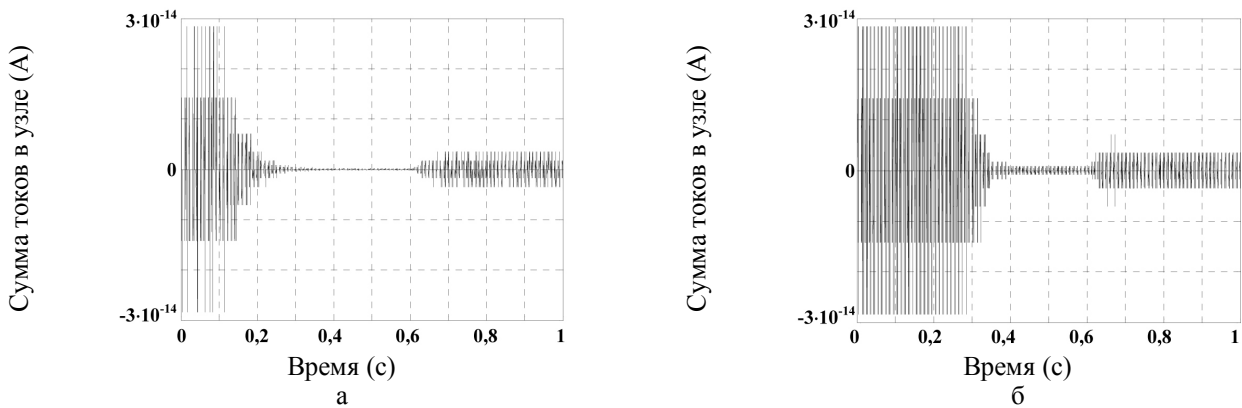


Рисунок 7 – Абсолютная погрешность расчетов токов в узлах модели АД

На рис. 7 приведены абсолютные погрешности расчета разработанной математической модели АД (сумма токов в узле), а – при шаге интегрирования, равном 0,0001 с, б – при шаге интегрирования 0,00001 с. Как видно, погрешность не превышает  $3 \cdot 10^{-14}$ .

Таблица 1 – Параметры АД и источника

№	Наименование	Об.	Величина	Ед.
Параметры двигателя				
1	Мощность	P	14	кВА
2	Фазное напряжение	U	220	В
3	Количество пар полюсов	p	1	
4	Частота сети	f	50	Гц
5	Количество фаз статора	m <sub>1</sub>	3	
6	Активное сопротивление фазы статора	R <sub>1</sub>	0,219	Ом
7	Индуктивность рассеяния обмотки статора	L <sub>1</sub>	0,002	Гн
8	Количество фаз ротора	m <sub>2</sub>	3	
9	Активное сопротивление фазы ротора, приведенное	R <sub>2</sub>	0,211	Ом
10	Индуктивность рассеяния обмотки ротора, приведенная	L <sub>2</sub>	0,002	Гн
11	Взаимоиндуктивность приведенная к обмотке статора	L <sub>m</sub>	0,092	Гн
12	Момент инерции	J <sub>d</sub>	0,09	кг*м <sup>2</sup>
Параметры источника напряжения				
1	Амплитуда фазного напряжения	U <sub>i</sub>	310	В
2	Количество фаз	m <sub>i</sub>	3	
3	Активное сопротивление фазы	R <sub>i</sub>	0,001	Ом
4	Индуктивность	L <sub>i</sub>	10 <sup>-7</sup>	Гн
5	Частота	f <sub>i</sub>	50	Гц

**ВЫВОДЫ.** 1. Разработанная математическая модель электрической машины работает стабильно, без сбоев на всем временном интервале интегрирования.

2. В математической модели ЭМ нет специального контроля токов в узлах. Контроль тока выполняется автоматически при одновременном определении всех неизвестных.

3. Математическая модель ЭМ отличается точностью расчета с учетом переменных параметров.

4. Математическая модель ЭМ легко адаптирует-

ся в сложную ЭМС и ЭМВС.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин А.В., Постников Ю.В. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 512 с.
2. Бобер В.А. Математическая модель электромеханических систем // Электромеханічні системи, методи моделювання та оптимізація. Зб. наук. праць VI Всеукраїнської науково-технічної конференції молодих учених у м. Кременчук 2–4 квітня 2008 року. – КДПУ, 2008. – С. 58–59.
3. Богославский Ю.М., Прокофьев Ю.А. Математические модели процессов и режимов электрических машин переменного тока и их реализация на персональных компьютерах. – К.: НТУУ «КПИ», 2001. – 242 с.
4. Василів К.М. Метод квазікомбінованих схем і вузлових уточнень струмів // Електроенергетичні та електромеханічні системи. Вісник Державного університету "Львівська політехніка". – 2000. – № 400. – С. 10–17.
5. Галиновский А.М., Бобер В.А. Математична модель безконтактної асинхронізованої машини з багатофазним збудником // Гідроенергетика України. – 2008. – № 4. – С. 21–27.
6. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. – М.: Энергия, 1980. – 928 с.
7. Колодницький М.М. Елементи теорії САПР складних систем. – Житомир: ЖІТІ, 1999. – 512 с.
8. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 1987. – 248 с.
9. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512 с.
10. Лищенко А.И., Мазуренко Л.И. Математическое моделирование асинхронных генераторов с вентильным возбуждением в фазных координатах статора // Техн. электродинамика, 1997. – № 6. – С. 31–36.
11. Плахтына Е.Г. Математическое моделирование электромашинно-вентильных систем. – Львов: Вища школа, 1986. – 164 с.
12. Сипайлов Г.А., Кононенко Е.В., Хорьков К.А. Электрические машины. – М.: Высшая школа, 1987. – 287 с.

## A MATHEMATICAL MODEL OF ELECTRIC MACHINES OF ALTERNATING CURRENT

**V. Bober**

National Technical University of Ukraine «Kiev Polytechnical Institute»  
ul. Pobedy, 37, Kiev, 03056, Ukraine. E-mail: bvictor@ua.fm

A special mathematical model of electrical machine of alternating current was developed. That is suitable for research of machines with varying parameters under dynamic conditions with high accuracy. We compared the results of the calculations start induction motor with squirrel-cage rotor for developed and well-known models. A mathematical model of electrical machine can be easily adapted to complex models of electromechanical and electrical-valve systems.

**Key words:** mathematical model, asynchronous, motor.

## REFERENCES

1. Basharin A.V., Postnikov Y.V. *Examples of calculation automated electric drive on a computer.* – L.: Energoatomizdat, 1990. – 512 p. [in Russian]
2. Bober, V.A. A mathematical model of electromechanical systems. Electromechanical systems, methods of modeling and optimization. Collection of scientific works VI All-Ukrainian scientific-technical conference of young scientists in Kremenchug. – KDPU, 2008. – PP. 58–59. [in Russian]
3. Bogoslavsky Yu.M., Prokofiev Y.A. *Mathematical models of processes and modes of electrical machines of alternating current and their implementation on personal computers.* – K.: NTUU «KPI», 2001. – 242 p. [in Russian]
4. Vasilev K.M. Method kvazikombinovanyh schemes and nodal corrections currents // *Electricity and electromechanical systems.* Bulletin of the State University "Lviv Polytechnic". – 2000. – № 400. – PP. 10–17. [in Ukrainian]
5. Galynovsky A.M., Bober V.A. Mathematical model of contactless asynchronous machines with multiphase agent // *Hydropower Ukraine.* – 2008. – № 4. – PP. 21–27. [in Ukrainian]
6. Ivanov-Smolensky A.V. *Electrical Machines.* – M: Energiya, 1980. – 928 p. [in Russian]
7. Kolodnytsky M.M. *Theory CAD of complex systems.* – Zhitomir: ZHITI, 1999. – 512 p. [in Ukrainian]
8. Kopylov I.P. *Mathematical modeling of electrical machines.* – M.: Vishshaya shkola, 1987. – 248 p. [in Russian]
9. Lazarev Yu. *Modeling of processes and systems in MATLAB.* – SPb.: Peter; K.: Publishing Group, BHV, 2005. – 512 p. [in Russian]
10. Lishchenko A.I., Mazurenko L.I. Mathematical modeling of asynchronous generators with valve excitation in the stator phase coordinates // *Tech. Electrodynamics.* – 1997. – № 6. – PP. 31–36. [in Russian]
11. Plahtyna E.G. *Mathematical modeling of electric machine-valve systems.* – Lviv. Vishcha shkola, 1986. – 164 p. [in Russian]
12. Sipaylov G.A., Kononenko E.V., Khorkov K.A. *Electrical Machines.* – M.: Vishshaya shkola, 1987. – 287 p. [in Russian]

Стаття надійшла 23.07.2012.

Рекомендовано до друку  
д.т.н., проф. Толочко О.І.