УДК 62-83:681.52

ДРОБНОМЕРНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С «КОРОТКОЙ ПАМЯТЬЮ» В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

И. О. Кузев, асп., С. А. Сергиенко, к.т.н., доц.
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, 39600, г. Кременчуг, Украина
E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
Р. С. Волянский, к.т.н., доц.
Днепродзержинский государственный технический университет
ул. Днепростроевская, 2, 51918, г.Днепродзержинск, Украина
E-mail: voliansky@ua.fm

Рассмотрены подходы к сокращению объемов математических расчетов при вычислении дробномерных производных в регуляторах релейных систем оптимального управления электроприводов постоянного тока при обеспечении заданного качества регулирования и сохранении необходимого запаса устойчивости.

Ключевые слова: производная дробномерого порядка, формула Грюнвальда-Летникова, объем выборки, релейная система оптимального управления, качество переходных процессов.

Введение. Развитие микропроцессорной техники в направлении создания недорогих быстродействующих микроконтроллеров с большой разрядностью объективно обуславливают предпосылки к совершенствованию систем управления электромеханическими комплексами. В настоящее время значительное внимание уделяется алгоритмам управления, в которых может быть использована информация не только о координатах объекта управления, но и об их производных и интегралах дробной размерности.

Анализ предыдущих исследований. Для вычисления производных и интегралов дробных порядков в системах управления электроприводами широко используются различные аппроксимационные зависимости, базирующиеся на классической теории дробномерных дифференциальных операторов [1, 2], построенных на основании частотных методов теории автоматического управления [3] и представляющих собой приближенную динамическую модель звена с дробномерным дифференциальным оператором [4].

Такой подход является приближенным и не имеет строгого математического обоснования. Поэтому для вычисления производных и интегралов дробных порядков будем использовать формулу Грюнвальда-Летникова, в соответствии с которой дробная производная $p^{\alpha}\eta_1$ определяется следующим образом:

$$p^{\alpha}\eta_1(t)= = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T^{\alpha}}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha-i+1)}\eta_1(t-iT), \quad (1)$$

где N, T – объем и интервал выборки, $\Gamma(...)$ – гамма-функция (Г-функция) соответствующего аргумента.

Приоритетное использование формулы (1) объясняется ее сравнительной простотой и достаточно хорошими принципиальными возможностями реализации на современной цифровой технике. Единственное существенное затруднение в технической реализации выражения (1) связано с необходимостью суммирования элементов s_i, описываемых выражением

$$s_i=(-1)^i\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha-i+1)}\eta_1(t-iT)= = D(\alpha,i)\eta_1(t-iT),\ i=0,...,N-1. \quad (2)$$

Данные элементы составляют ряд S, который образуется при устремлении объема выборки N к бесконечности. Очевидно, что необходимость запоминания и манипулирование с массивами информации бесконечно большого объема является технически нереализуемым. Сокращение же объемов выборки приводит к появлению эффекта «короткой памяти», влияние которого на процессы в системе практически не изучены. Поэтому задача обеспечения вычисления дробномерных производных и интегралов в реальном времени является актуальной.

Цель работы. Определение подходов к сокращению объемов математических расчетов при вычислении дробномерных производных при сохранении заданных качественных показателей систем управления электроприводов постоянного тока.

Материал и результаты исследования. Пусть электромеханическая система описывается дифференциальными уравнениями в отклонениях [5]

$$p\eta_1=b_{12}\eta_2;\quad p\eta_2=b_{21}\eta_1+b_{22}\eta_2+m_2u, \quad (3)$$

где $b_{12}=\frac{1}{T_m}$; $b_{21}=b_{22}=-\frac{1}{T_e}$; $m_2=\frac{1}{T_e}$;

T_e, T_m – эквивалентные электромагнитная и электромеханическая постоянные времени электропривода; η_1, η_2 – координаты электропривода (скорость вращения двигателя и ток якорной цепи соответственно) на траекториях возмущенного движения.

Анализ выражения (2) показывает, что его значение определяется величиной отклонения координаты возмущенного движения η_1 и значением дроби:

$$D(\alpha,i)=(-1)^i\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha-i+1)}. \quad (4)$$

Для сокращения объемов вычислений и выполнения их с известной степенью точности можно пренебречь малыми отклонениями, т.е. установить порог на уровне точности измерительной аппаратуры, которая используется в электромеханической системе.

Такой подход позволяет сократить время определения производной дробного порядка (1) за счет снижения времени, которое затрачивается на вычисление члена ряда s_i, если определяющее его отклонение меньше заданной точности. Однако он не исключает необходимости перебора всех элементов ряда S и сравнения их с величиной установленного порога.

Для ограничения числа элементов, используемых при вычислении дробномерной производной, рассмотрим значения весового коэффициента (4). Очевидно, что при изменяющемся значении индекса i элемента массива значения коэффициентов $D(\alpha, i)$ будут переменными.

Для выяснения их возможных значений рассмотрим зависимость, определяющую Г-функцию.

Согласно [1], для любых комплексных чисел z с положительной вещественной частью справедливо выражение

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt\ , \qquad (5)$$

а Г-функция (5) имеет следующую геометрическую интерпретацию:

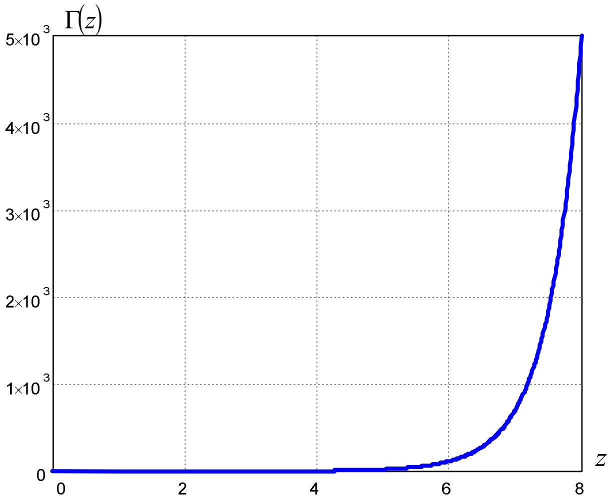

Рисунок 1 – Г-функция вещественного положительного аргумента

Анализ зависимости (рис. 1) показывает, что на интервале $[0, +\infty)$ Г-функция возрастает и не имеет экстремумов.

Следовательно, значение выражения (4) будет убывать, причем графически изменение коэффициента $|D(\alpha, i)|$ можно представить поверхностью, показанной на рис. 2.

Анализ приведенного распределения показывает, что для множества первых элементов $|D(\alpha,1)|, \alpha \in [0,1]$, зависящих от порядка α оператора дифференцирования, наибольшее значение имеет элемент, соответствующий производной целого порядка. Т.е. максимум, равный условной единице, наблюдается при $\alpha = 1$. Значения коэффициентов, соответствующих значениям α из диапазона $[0,1)$, уменьшаются линейно и минимальное значение элемента множества $|D(\alpha,1)|$ соответствует случаю $\alpha = 0$, т.е. вырождению дробно-дифференциального оператора в линейный.

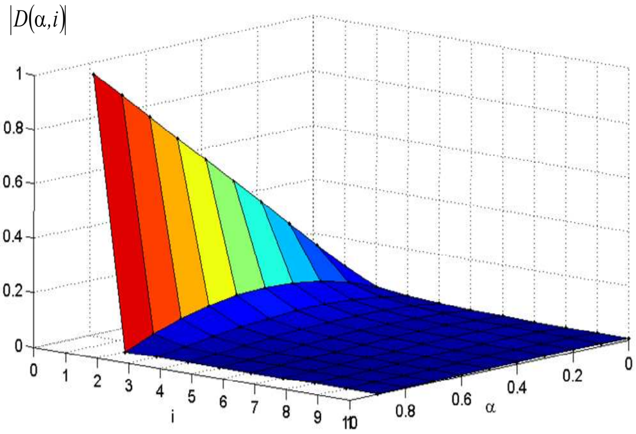

Рисунок 2 – Поле значений весовых коэффициентов членов ряда (2)

Интересной особенностью полученной зависимости является то, что для остальных членов ряда $|D(\alpha, i)|, \alpha \in [0,1],\ i \in [2, +\infty)$ значения зависимости (4) аппроксимируются квадратичным полиномом, а сама зависимость приобретает явно выраженный экстремальный характер. Для $i = 2$ этот полином имеет следующий вид:

$$P(\alpha) = -0{,}5\alpha^2 + 0{,}4\alpha + 0{,}045\ . \qquad (6)$$

Максимум полинома (6) приходится на значение, соответствующее $\alpha = 0{,}5$. При увеличении числа значимых элементов максимум зависимости смещается влево (рис. 3).

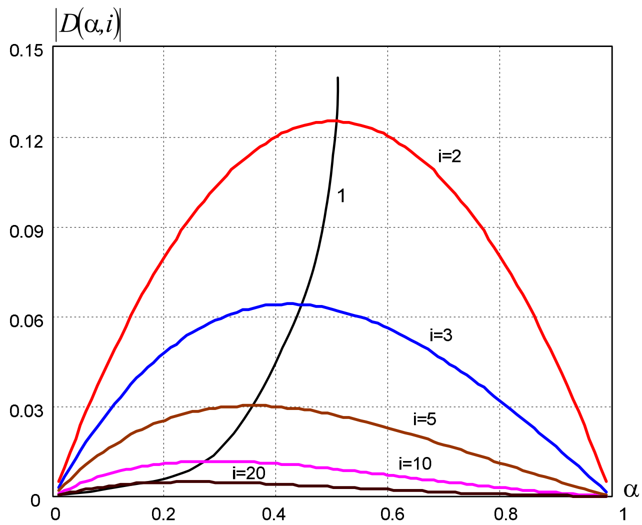

Рисунок 3 – Смещение максимума весовых коэффициентов (4) при изменении объема выборки

Несмотря на существенную нелинейность коэффициентов (4), их значения, начиная с 10 элемента, не превышают 0,01.

Экстремальный характер имеет и само значение дробного дифференциала p^{α}. Для удобства анализа на рис. 4, 5 отклонение координаты возмущенного движения принято постоянным и равным единице.

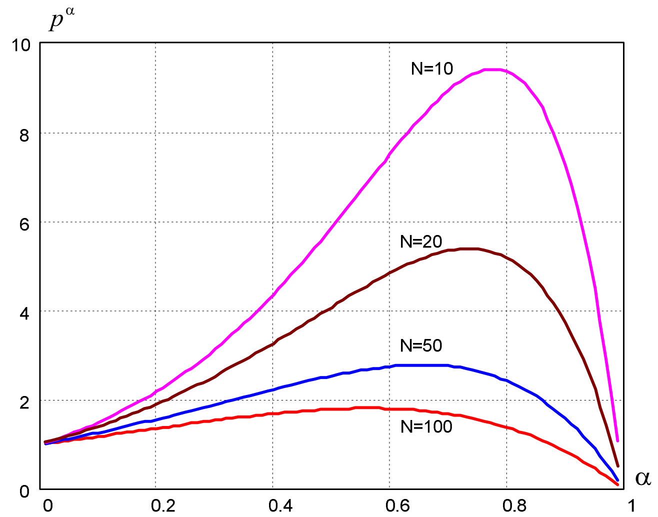

Рисунок 4 – Значение дробного дифференциала при изменении объема выборки. T=0,001

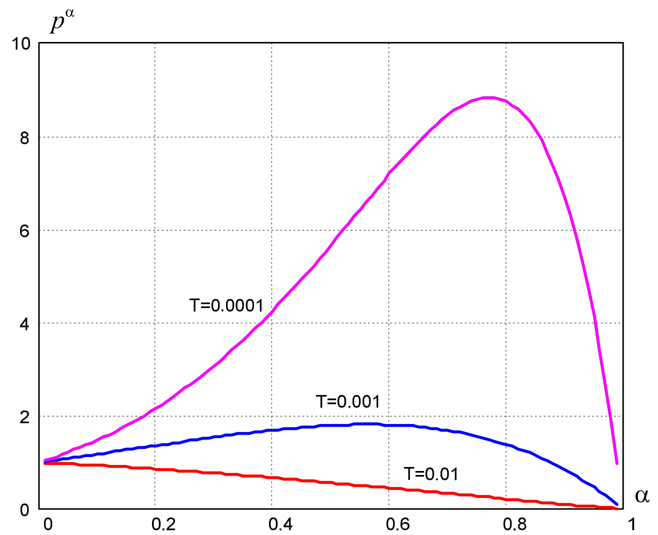

Рисунок 5 – Значение дробного дифференциала при изменении интервала выборки. N=100

Несложно заметить, что и снижение объема, и уменьшение интервала выборки приводят к росту значения p^{α}. Из графиков видно, что одно и то же значение дробнодифференциальной функции может быть получено при разных значениях параметров α, N, T.

Необходимо также отметить, что в реальной электромеханической системе при небольшом объеме выборки может иметь место эффект «короткой памяти», т.е. при одинаковых расчетных p^{α} реальные их значения могут существенно отличаться. Это обусловлено постоянным изменением отклонения координаты возмущенного движения η_1, естественными и искусственными ограничениями (например, на максимальное значение управляющего воздействия), нелинейностями и т.п. Очевидно, что указанный факт должен быть учтен при технической реализации системы управления.

Для объекта управления (3), в соответствии с [5], разрывное управление имеет вид:

$$U = -sign\left(-b_{22}\eta_1 + p\eta_1\right), \qquad (6)$$

определяя структуру регулятора как релейную с пропорционально-дифференциальной линией переключения.

Заменив в управлении (6) производную $p\eta_1$ ее дробномерным аналогом, приведем управляющее воздействие к виду:

$$U = -sign\left(-b_{22}\eta_1 + p^{\alpha}\eta_1\right), \alpha \in [0,1]. \qquad (7)$$

Результаты математического моделирования системы управления с алгоритмом (7) для электропривода с двигателем постоянного тока типа ДПР-72 для различных значений α показаны на рис. 6.

Как следует из анализа полученных результатов, уменьшение показателя α характеризуется снижением демпфирующего влияния производной в законе управления. Это приводит к уменьшению скорости рассеяния избыточной энергии, которая запасена на траекториях возмущенного движения, снижению частоты переключений релейного регулятора и, как следствие, повышению колебательности в системе. Избыточное же влияние Д-составляющей приводит к затягиванию переходных процессов.

Практически аналогичная ситуация наблюдается и при изменении объема выборки при фиксированном интервале и показателе α (рис. 7). Причем при определенном сочетании основных параметров формулы Грюнвальда-Летникова (α, N, T) может быть получено высокое качество переходных процессов в системе при незначительном объеме выборки (рис.7, $\alpha = 0{,}8$, $N = 10$).

Выводы. Таким образом, возможность варьирования основных параметров при вычислении производных нецелочисленных порядков позволяет значительно упростить техническую реализацию систем с дробномерной гиперплоскостью переключения при обеспечении заданного качества регулирования и сохранении необходимого запаса устойчивости. Дальнейшие исследования в этой области будут направлены на определение математических зависимостей между параметрами объекта управления, коэффициентами дробномерных производных и качественными характеристиками системы электропривода в статических и динамических режимах.

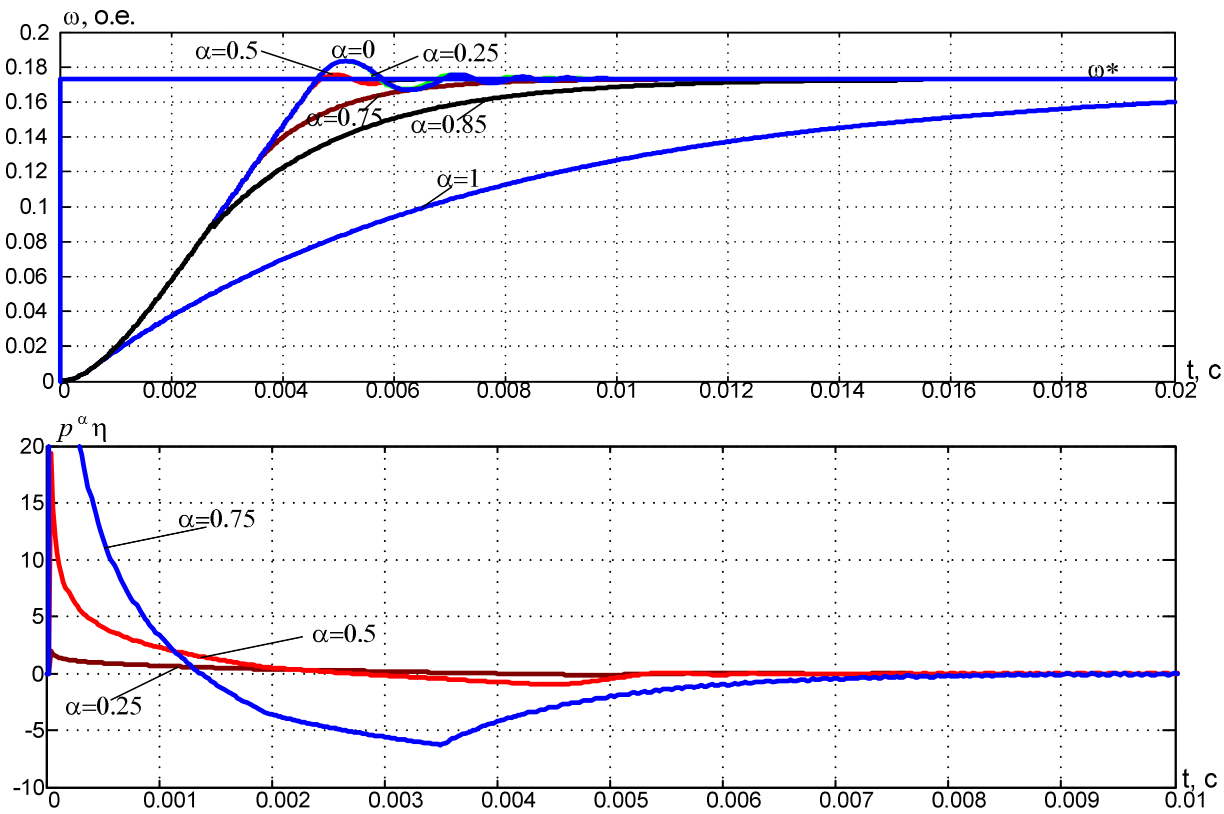

Рисунок 6 – Переходные процессы в системе с дробномерным регулятором при изменении показателя α . Объем выборки N=100, интервал выборки T=2x10^{-5}c

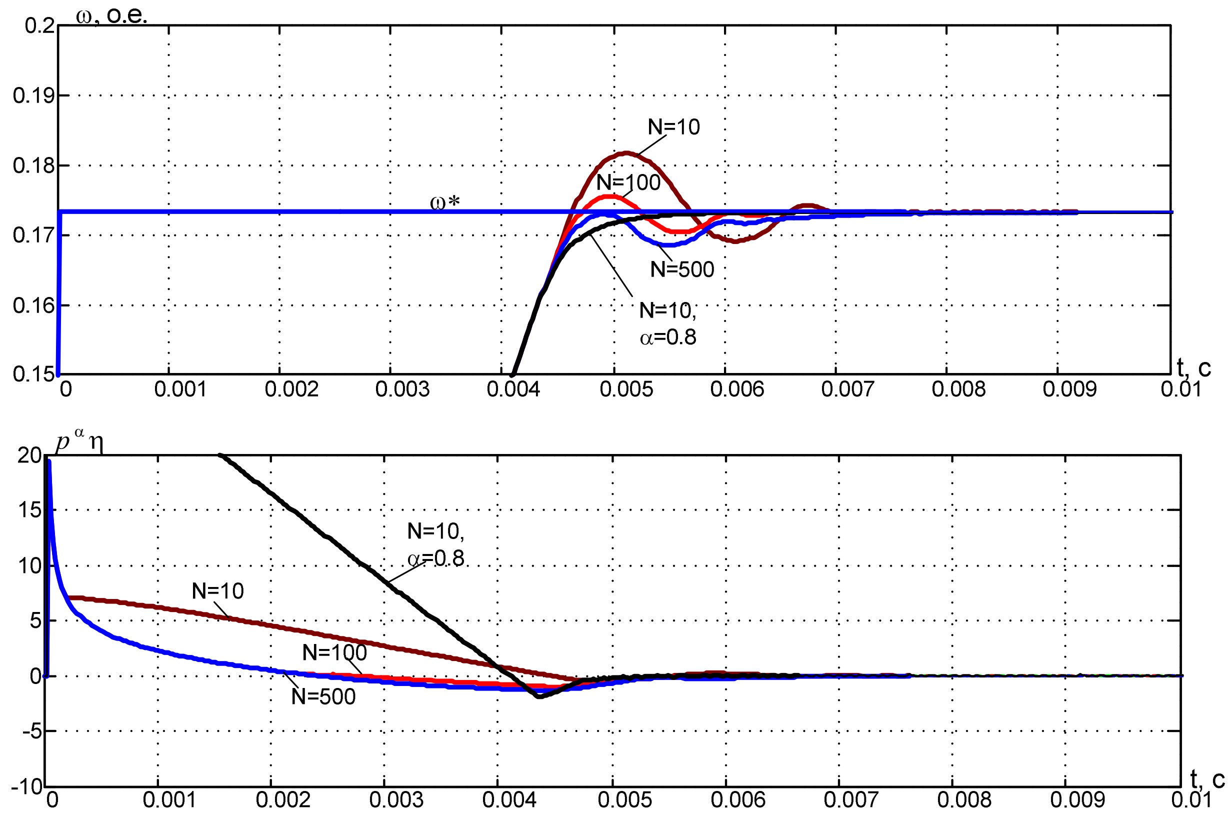

Рисунок 7 – Переходные процессы в системе с дробномерным регулятором при изменении объема выборки. Интервал выборки T=2x10^{-5}c, оператор $\alpha = 0.5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – К.: Изд-во НАН Украины, 2008. – 256 с.

2. Fractional calculus applications in automatic control and robotics. 41st IEEE conference on decision and control tutorial workshop #2, Las Vegas, 2002, 316 p.

3. Wang, Jifeng, Li Yuankai, Frequency domain analysis and applications for fractional-order control systems, Journal of physics: conference series 13 (2005), PP 268-273.

4. Dingyu Xue, Yangquan Chen. Rational approximations to fractional order linear systems, Proceedings of idetc/cie 2005 ASME 2005 international design engineering technical conferences & computers and information in engineering conference, Long Beach, California, 2005, PP 23-31.

5. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / А.В. Садовой, Б.В. Сухинин, Ю.В. Сохина; под общ. ред. Садового А.В. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.

Стаття надійшла 06.06.2011 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Родькіним Д.Й.

ДРОБНОМІРНІ РЕГУЛЯТОРИ З «КОРОТКОЮ ПАМ'ЯТЮ» В РЕЛЕЙНИХ СИСТЕМАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

І. О. Кузєв, асп., С. А. Сергієнко, к.т.н., доц.
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, 39600, м. Кременчук, Україна
E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
Р. С. Волянський, к.т.н., доц.
Дніпродзержинський державний технічний університет
вул. Дніпробудівська, 2, 51918, м. Дніпродзержинськ, Україна
E-mail: voliansky@ua.fm

Розглянуто підходи до скорочення обсягів математичних розрахунків при обчисленні дробномірних похідних у регуляторах релейних систем оптимального керування електроприводів постійного струму при забезпеченні заданої якості регулювання та збереженні необхідного запасу стійкості.

Ключові слова: похідна дробномірного порядку, формула Грюнвальда-Летнікова, обсяг вибірки, релейна система оптимального керування, якість перехідних процесів.

FRACTIONAL REGULATOR WITH "SHORT MEMORY" IN RELAY SYSTEMS OF OPTIMAL CONTROL

I. Kuzev, post-grad., S. Serhiyenko, Cand.Sc. (Eng.), Assoc. Prof.
Kremenchuk Mykhaylo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, 39600, Kremenchuk, Ukraine
E-mail: sergsa@kdu.edu.ua
R. Voliansky, Cand.Sc. (Eng.), Assoc. Prof.
Dniprodzerzhinsk State Technical University
vul. Dniprobudivska, 2, 51918, Dniprodzerzhinsk, Ukraine
E-mail: voliansky@ua.fm

The approaches to reduce the amount of mathematical calculations in thecalculating fractional derivatives regulators relay systems optimal control of DC motors , while ensuring the specified quality control and maintaining the necessary safety factor

Key words: derivative fractional order, formula of Grunwald-Letnikov, sample size, the relay system of optimal control, quality of transients.