УДК 621.3

НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА НАМАГНИЧЕННОЕ ВЕЩЕСТВО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Загирняк М.В., д.т.н., проф.
Кременчугский государственный политехнический университет имени Михаила Остроградского
E-mail: mzagirn@polytech.poltava.ua
Бранспиз Ю.А., д.т.н., проф.
Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля
E-mail: branspiz@mail.ru

На конкретному прикладі розрахунку силового впливу однорідного магнітного поля на магнітний провід зі струмом показано, що визначення сили цього поля на магнітну речовину проводу для відомих моделей намагніченості (модель еквівалентних струмів і модель фіктивних магнітних зарядів) дає неоднозначний результат. Зроблено висновок, що така неоднозначність залишає актуальним поставлене А. Ейнштейном питання про визначення сили на струм у магнітній речовині.

Ключові слова: магнітне поле, силова дія, модель намагнічування, еквівалентний струм намагнічування, фіктивний магнітний заряд

Taking computation of a uniform magnetic field force action on a live magnetic wire as a particular example, it has been shown that determination of this field force acting on the wire magnetic substance produces an ambiguous result for the known magnetization models (equivalent currents model and fictitious magnetic charge model). It has been concluded that this ambiguity leaves A. Einstein’s questions, concerning determination of the force acting on magnetic substance current, urgent.

Key words: magnetic field, force action, magnetization model, magnetization equivalent current, fictitious magnetic charge

Введение. В настоящее время для расчета силового воздействия постоянного магнитного поля на тела, вещество которых имеет магнитные свойства, известно несколько разных подходов [1, 2]. В частности, применение находит подход, связанный с интегрированием по объему тела удельной силы, определенной по одной из моделей намагниченного состояния вещества: модели молекулярных токов, распределенных с объемной плотностью $\bar{j}_m = rot\overline{M}$, и модели фиктивных магнитных зарядов, распределенных с объемной плотностью $\rho_m = -\mu_0 div\overline{M}$ (здесь $\overline{M}$ – вектор намагниченности вещества, μ_0 – магнитная постоянная) [2].

Известно, что два указанных способа моделирования намагниченного состояния вещества дают одинаковый результат (интегральная эквивалентность) при определении суммарной силы со стороны магнитного поля на тело, в объеме которого отсутствуют электрические токи проводимости (макроскопические токи) [3, 4].

Цель работы. На простом примере показать, что интегральная эквивалентность для указанных способов моделирования намагниченного состояния вещества не сохраняется, если в объеме тела, на которое определяется силовое воздействие постоянного магнитного поля, протекают электрические токи проводимости.

Постановка задачи. Рассматриваем прямолинейный проводник с током из материала с магнитными свойствами, который помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\overline{B}_0$, направленной ортогонально оси провода (рис. 1).

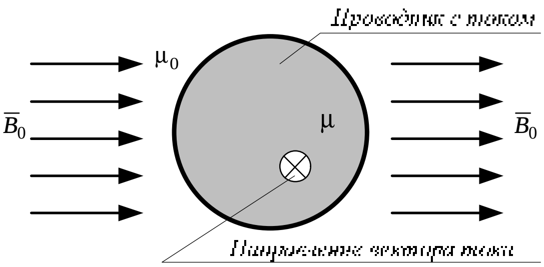

Рисунок 1 – Провод с током из материала с магнитными свойствами в однородном магнитном поле

В общем случае произвольного внешнего магнитно поля, очевидно, суммарная сила на магнитный провод с током во внешнем магнитном поле (сила $\overline{F}_\Sigma$) может быть представлена как сумма следующих сил: $\overline{F}_1$ – силы на электрический ток в проводе и $\overline{F}_2$ – силы на намагниченное вещество провода.

В свою очередь, силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ также могут быть представлены как определенные суммы сил соответственно взаимодействиям между материальными объектами системы. А именно:

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{1M} + \overline{F}_{1i}, \qquad (1)$$

где $\overline{F}_{10}$ – сила на ток со стороны внешнего магнитного поля; $\overline{F}_{1M}$ – сила на ток, со стороны магнитного поля, обусловленного намагниченностью вещества провода; $\overline{F}_{1i}$ – сила на ток со стороны магнитного поля, созданного самим током;

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{20} + \overline{F}_{2M} + \overline{F}_{2i}, \qquad (2)$$

где $\overline{F}_{20}$ – сила на магнитное вещество провода со стороны внешнего магнитного поля; $\overline{F}_{2M}$ – сила на магнитное вещество провода со стороны магнитного поля, созданного этим намагниченным веществом; $\overline{F}_{2i}$ – сила на магнитное вещество провода со стороны магнитного поля тока.

Отметим, что, согласно закону о равенстве действия и противодействия для составляющих $\overline{F}_{1M}$ и $\overline{F}_{2i}$ в (1) и (2) имеет место равенство $\overline{F}_{1M} = -\overline{F}_{2i}$; а составляющие $\overline{F}_{1i}$ и $\overline{F}_{2M}$ в (1) и (2) численно равны нулю, поскольку каждая из них представляет суммарную силу в замкнутой системе.

Исходя из этого, вместо (1) и (2) можно записать разложения

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{1M} \qquad (3)$$

и

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{20} + \overline{F}_{2i}, \qquad (4)$$

а для суммарной силы $\overline{F}_\Sigma$ можно записать такое соотношение

$$\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{10} + \overline{F}_{20}. \qquad (5)$$

Таким образом, согласно (5), в произвольном внешнем магнитном поле суммарная сила на магнитный провод с током складывается из силы внешнего магнитного поля на ток в проводе и силы на его магнитное вещество.

В случае однородного внешнего магнитного поля учтем, что это поле, как известно, не создает силы на любое магнитное тело в нем. То есть учтем, что в этом случае $\overline{F}_{20} = 0$, и суммарная сила на магнитный провод с током определяется лишь действием внешнего поля на ток в проводе: $\overline{F}_\Sigma = \overline{F}_{10}$. Что же касается силы на намагниченное вещество провода, то она, согласно (4), в этом случае ($\overline{F}_{20} = 0$) определяется только составляющей $\overline{F}_{2i}$.

Вычисление этой составляющей силы для двух моделей намагниченного состояния вещества (модели молекулярных токов и модели фиктивных магнитных зарядов) с целью сопоставление полученных результатов и было задачей, которая решалась в данной работе.

О составляющих силы на магнитное вещество провода со стороны магнитного поля тока. Для того, чтобы определить рассматриваемую силу $\overline{F}_{2i}$, разложим ее следующим образом

$$\overline{F}_{2i} = \overline{F}_{2i0} + \overline{F}_{2ii}, \qquad (6)$$

где $\overline{F}_{2i0}$ и $\overline{F}_{2ii}$ – составляющие силы магнитного поля тока на намагниченное вещество, намагниченность которого обусловлена, соответственно, внешним магнитным полем и магнитным полем тока.

В силу симметрии намагничивания вещества провода с током в магнитном поле тока можно утверждать, что для точек провода, симметричных относительно его оси, составляющие силы $\overline{F}_{2ii}$ будут взаимно уравновешиваться так, что суммарная сила по этим составляющим во всем проводе даст нулевое значение

$$\overline{F}_{2ii} = 0. \qquad (7)$$

Тогда для суммарной силы только на магнитное вещество провода, с учетом (7), из (6) получаем равенство

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_{2i0}. \qquad (8)$$

При таком подходе появляется возможность строгого определения суммарной силы на магнитное вещество провода, исходя из физического смысла составляющей $\overline{F}_{2ii}$, согласно которому необходимо предварительно найти намагниченность вещества провода в однородном магнитном поле.

Для этого учтем, что однородное магнитное поле, которое ортогонально оси провода, создает внутри цилиндрического провода также однородное поле с индукцией

$$\overline{B} = \frac{2\mu}{\mu_0 + \mu}\overline{B}_0, \qquad (9)$$

где μ – магнитная проницаемость вещества провода.

Это позволяет записать для вектора намагниченности $\overline{M}_0$ магнитного провода следующее соотношение

$$\overline{M}_0 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu}\overline{B}, \qquad (10)$$

То есть, согласно (10) и (9), для намагниченности провода можно записать следующее выражение

$$\overline{M}_0 = 2\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0(\mu + \mu_0)}\overline{B}_0. \qquad (11)$$

Расчет силы на намагниченное вещество провода по модели магнитных зарядов. Согласно модели фиктивных магнитных зарядов силовое воздействие магнитного поля тока в проводе (обозначим его напряженность $\overline{H}_i$) на вещество, имеющее намагниченность $\overline{M}_0$ может быть определено как интеграл по объёму провода (принимаем в качестве объёма интегрирования объём единицы длины провода, что дает при указанном интегрировании удельное значение силы) следующего вида

$$-\mu_0 \int_V \overline{H}_i div \overline{M}_0 dv,$$

который в рассматриваемом случае (с учетом плоскопараллельности задачи) может быть записан как интеграл по сечению цилиндра, откуда находим

$$\overline{f}_{2i0} = -\mu_0 \int_{S_0} \overline{H}_i \, div \overline{M}_0 \, ds, \qquad (12)$$

где S_0 – площадь сечения цилиндрического провода (перпендикулярно оси).

Поскольку, согласно (11), $\overline{M}_0 = const$ во всех точках сечения провода, кроме точек на его поверхности (здесь вектор намагниченности претерпевает разрыв), то, согласно результатам второго раздела, вместо интеграла (12) можно записать интеграл вида

$$\overline{f}_{2i0} = -\mu_0 \int_{L_0} \overline{H}_i (\overline{n} \cdot \overline{M}_0) dl, \qquad (13)$$

где L_0 – круговой контур, ограничивающий сечение цилиндрического провода (на поверхности провода); dl – дифференциальный элемент этого контура.

Отметим, что при записи интеграла в (13) учтена также непрерывность вектора $\overline{H}_i$ в точках на поверхности провода (ведь вектор $\overline{H}_i$ – это вектор магнитного поля тока в проводе, который является касательным к любой окружности внутри провода и к окружности сечения провода).

Найдем первоначально вертикальную составляющую удельной силы $\overline{f}_{2i0}$, которую обозначим f_y. Для чего, очевидно, необходимо определить интеграл

$$f_y = \mu_0 \int_{L_0} H_{iy} (\overline{n} \cdot \overline{M}) dl, \qquad (14)$$

где H_{iy} – проекция вектора $\overline{H}_i$ на вертикальную ось (рис. 2).

С этой целью учтем, что (рис. 2)

$$\overline{n} \cdot \overline{M} = M_0 \cos\alpha, \qquad (15)$$

$$H_{iy} = H_i \cos\alpha, \qquad (16)$$

где (по закону полного тока)

$$H_i = \frac{i}{2\pi R}. \qquad (17)$$

Тогда, подставляя (15) и (16) в (14), получим

$$f_y = \mu_0 \frac{iM_0}{2\pi R} \int_{L_0} \cos^2 \alpha dl. \qquad (18)$$

Но, поскольку дифференциальный элемент длины окружности связан с ее радиусом соотношением $dl = Rda$ (здесь da - дифференциальный элемент угла с вершиной в центре окружности, опирающуюся на дугу длиной dl), то интегрирование в (18) дает следующую цепочку равенств (с учетом симметрии)

$$f_y = \frac{\mu_0}{\pi} iM_0 \int_0^\pi cos^2 \alpha d\alpha =$$

$$\frac{\mu_0}{\pi} iM_0 (\frac{1}{4} sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \mu_0 iM_0,$$

или, с учетом (11),

$$f_y = iB_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0}. \qquad (19)$$

Что же касается горизонтальной составляющей силы $\overline{f}_{2i0}$ (обозначим ее f_x), то для нее, аналогично предыдущему, имеем (рис. 2)

$$f_x = \mu_0 \int_L H_{ix} (\overline{n} \cdot \overline{M}_0) dl,$$

где $H_{ix} = H_i \sin\alpha$ – проекция вектора $\overline{H}_i$ на ось x.

Далее, с учетом равенства (15), имеем

$$f_x = \mu_0 H_i M_0 \int_L \sin\alpha \cos\alpha dl,$$

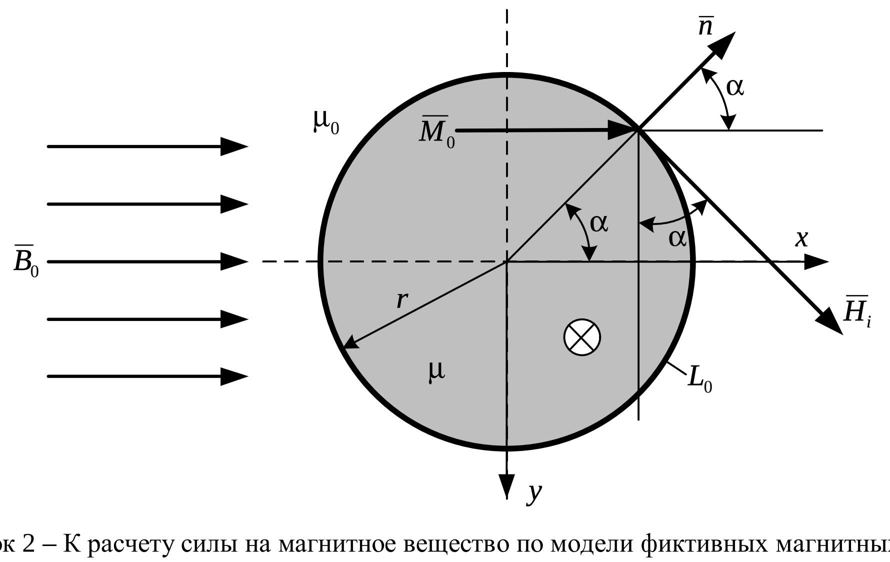

Рисунок 2 – К расчету силы на магнитное вещество по модели фиктивных магнитных зарядов или, с учетом равенства $dl = Rd\alpha$, имеем

$$f_x = \mu_0 H_i M_0 R \int_0^{\pi} \sin 2\alpha d\alpha =$$

$$-\mu_0 H_i M_0 R \cos 2\alpha\Big|_0^{\pi} = 0 .$$

Таким образом, сила $\overline{f}_{2i0}$ имеет только составляющую, направленную по оси y (перпендикулярно векторам плотности тока и индукции внешнего поля).

Расчет силы на намагниченное вещество по модели эквивалентных токов. По модели молекулярных токов (эквивалентных токов намагничивания) намагниченное вещество с намагниченностью $\overline{M}_0$ может быть заменено распределением токов с объёмной плотностью $rot\overline{M}_0$ в пространстве провода с магнитной проницаемостью μ_0.

В этом случае магнитное поле тока в проводе, имеющее индукцию $\mu_0 \overline{H}_i$, действует на эквивалентные токи в проводе (в объёме единичной длины) создавая удельную силу

$$f_{2i0} = \mu_0 \int_{S_0} rot\overline{M}_0 \times \overline{H}_i ds , \qquad (20)$$

(здесь сразу учтен плоскопараллельный характер решаемой задачи).

Как и в предыдущем случае, для всех точек сечения провода (кроме точек на поверхности провода) вектор $\overline{M}_0$ постоянен. Тогда, вместо интеграла в (20), используя понятие поверхностного ротора [5], можно записать интеграл вида

$$\overline{f}_{2i0} = -\int_{L_y} \left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i dl . \qquad (21)$$

Принимая во внимание геометрию решаемой задачи (рис. 3), для модуля вектора $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ равного

$$\left|\overline{n}\right| \cdot \left|\overline{M}_0\right| \sin(\overline{n}, \overline{M}_0) ,$$

имеем

$$\left|\overline{n}\right| = 1 ,$$

$$\left|\overline{M}_0\right| = M_0 , \qquad \sin(\overline{n}, \overline{M}_0) = \sin\alpha ,$$

что дает равенство

$$\left|\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]\right| = M_0 \sin\alpha .$$

При этом вектор $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ направлен по направлению оси провода (перпендикулярно плоскости рисунка, рис. 3). То есть, вектор $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ ортогонален вектору $\overline{H}_i$. Поэтому векторное произведение $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ по модулю равно просто произведению соответствующих векторов

$$\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i = \left(\left|\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]\right|\right)\left|\overline{H}_i\right| = H_i M_0 \sin\alpha . \qquad (22)$$

Направлен же вектор $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ ортогонально и вектору $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right]$ и вектору $\overline{H}_i$, то есть – по линии радиуса, как это и показано на рис. 3.

При этом в векторе $\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i$ нас будет интересовать первоначально вертикальная составляющая, равная, с учетом (22), в рассматриваемом случае

$$\left|\left[\overline{n} \times \overline{M}_0\right] \times \overline{H}_i\right| \sin\alpha = M_0 H_i \sin\alpha . \qquad (23)$$

Соответственно (23), расчет составляющей силы $\overline{f}_{2i0}$ по оси y-ков из (21) дает следующую цепочку равенств

$$f_y = -\mu_0 M_0 H_i R \int_{L_y} \sin^2 \alpha d\alpha$$

$$= -2\mu_0 M_0 H_i R \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\pi\mu_0 M_0 H_i R ,$$

что, с учетом (11) и (17), дает

$$f_y = -iB_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} . \qquad (24)$$

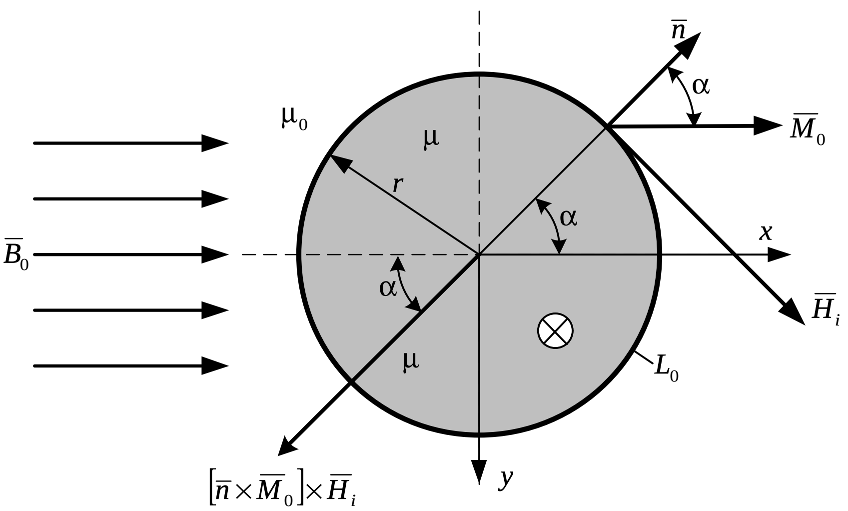

Рисунок 3 – К расчету силы на магнитное вещество по модели эквивалентных токов

Что же касается горизонтальной составляющей силы $\overline{f}_{2i0}$ по модели эквивалентных токов намагничивания, то для нее, с учетом (22) и изложенного выше о направлении вектора $\left[\overline{n}\times\overline{M}_0\right]\times\overline{H}_i$, можно записать интеграл

$$f_x = -\mu_0 H_i M_0 R \int_{L_0} \sin\alpha\cos\alpha d\alpha,$$

который аналогичен интегралу для f_x по модели фиктивных магнитных зарядов. Это дает для f_x и в этом случае тождественный ноль.

Обсуждение полученных результатов. Соответственно изложенному выше и модель эквивалентных токов намагничивания, и модель фиктивных магнитных зарядов позволяют получить для силы на магнитное вещество провода в рассматриваемом случае ненулевой результат. Причем, согласно (19) и (24) для обеих рассмотренных моделей имеем одинаковые по модулю силы на магнитное вещество, но противоположную направленность этих сил. Это означает, что наличие тока в магнитном веществе провода не сохранило интегральную эквивалентность при определении суммарной силы на тело из магнитного вещества, которая, как отмечалось во введении, имеет место в отсутствии электрических токов в магнитном веществе.

Это означает также, что, поскольку соответственно поставленной задаче, обе рассмотренные модели должны давать одинаковый результат для суммарной силы на провод с током, то определение силы на ток в проводе по этим обеим моделям также даст различный результат (чтобы сумма сил на ток и магнитное вещество была одинаковой).

Как следствие, вопрос о способе определения силы на ток в магнитном веществе, который в свое время поставил А. Эйнштейн [6], представляется остающимся актуальным.

Выводы.

1. Показано, что для рассмотренного примера не сохраняется интегральная эквивалентность между моделями намагниченного состояния (модель эквивалентных токов намагничивания и модель фиктивных магнитных зарядов) при определении суммарной силы на магнитное вещество тела, по которому протекает электрический ток.

2. Требует дополнительного решения задача определения силового воздействия магнитного поля на электрический ток в теле из намагниченного вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред.– М.: Мир, 1991.– 560 с.

2. Загирняк М.В., Бранспиз Ю.А. Оценка общих способов определения объёмной плотности и результирующей силы взаимодействия малого ферромагнитного тела с полем электромагнита - сепаратора // Изв. вузов. Электромеханика.– 1987.– №11.– С. 134-136.

3. Тамм И.Е. Основы теории электричества.– М.: Наука, 1989.–504 с.

4. Müller W. Comparison of different methods of force calculation // IEEE Transactions on magnetics.– 1987.– Vol. 26, №2.– P. 1058-1061.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. –831с.

6. Эйнштейн А. О пондеромоторных силах, действующих на ферромагнитные проводники с током, помещенные в магнитное поле: В кн. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. В 4-х т. Т. 3.– М.: Наука, 1966.– С. 240-241.

Стаття надійшла 15.07.2008 р.
Рекомендовано до друку к.т.н., доц.
Прусом В.В.