

УДК 519.87:658.012.011.56:622

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДСИСТЕМЫ ПОИСКА ПУСТОТ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГОРНЫМ ПРЕДПРИЯТИЕМ

П. С. Смолянський, Т. П. Козикова

Государственное высшее учебное заведение «Криворожский национальный университет»
ул. Лермонтова, 13/48, г. Кривой Рог, 50002, Украина. E-mail: sirius.ps@gmail.com

Поиск пустот техногенного и природного характера становится все более актуальной задачей в современных условиях. Для их мониторинга необходимо построение подсистемы поиска пустот автоматизированной системы управления горным предприятием. Одним из основных условий построения модели подсистемы является решение интегральных уравнений первого рода для различных геофизических полей, в частности, гравитационных, как наиболее доступного и универсального. Решение интегральных уравнений первого рода относится к теории обратных некорректных задач, которая бурно развивается в настоящее время.

Предложен метод упрощения процесса решения многомерных интегральных уравнений первого рода путем разделения скалярных источников поля на поверхностные и объемные. Получены оценки погрешности вычисления коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений при переходе к кусочно-постоянной аппроксимации функции плотности поверхностных источников.

Ключевые слова: локализация пустот, обратная задача, интегральные уравнения, аппроксимация, численное моделирование.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПІДСИСТЕМИ ПОШУКУ ПУСТОТ АВТОМАТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ГІРНИЧИМ ПІДПРИЄМСТВОМ

П. С. Смолянський, Т. П. Козикова

Державний вищий навчальний заклад «Криворізький національний університет»
вул. Лермонтова, 13/48, м. Кривий Ріг, 50002, Україна. E-mail: sirius.ps@gmail.com

Пошук пустот техногенного та природного характеру стає все більш актуальним завданням у сучасних умовах. Для їх моніторингу необхідна побудова підсистеми пошуку пустот автоматизованої системи управління гірничим підприємством. Однією з основних умов побудови моделі підсистеми є рішення інтегральних рівнянь першого роду для різних геофізичних полів, зокрема гравітаційного, як найбільш доступного й універсального. Рішення інтегральних рівнянь першого роду належить до теорії обернених некорректних задач, яка бурхливо розвивається в даний час.

Запропоновано метод спрощення процесу рішення багатовимірних інтегральних рівнянь першого роду шляхом поділу скалярних джерел поля на поверхневі та об'ємні. Отримано оцінки похибки обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь при переході до кусково-постійної апроксимації функції щільності поверхневих джерел.

Ключові слова: локалізація пустот, зворотна задача, інтегральні рівняння, апроксимація, чисельне моделювання.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Построение автоматизированных систем мониторинга геофизических объектов и процессов является одной из важных задач, стоящих перед добывающей отраслью Украины вообще и Криворожского бассейна в частности. Пустоты и полости в земной коре как техногенного, так и природного происхождения все чаще вызывают землетрясение средней и большой мощности, которые приводят к заметным локальным разрушениям. Последнее такое землетрясение силой около четырех баллов по шкале Рихтера было, по видимому, 24 июня 2013 в районе города Кривой Рог. Вместе с тем отсутствуют эффективные системы обнаружения и оценки объема, геометрии и глубины залегания полостей земной коры даже на небольших глубинах. В качестве отдельного интересного класса таких пустот следует выделить мигрирующие, т.е. пустоты, меняющие свое положение за счет частичного обрушения без выхода на поверхность. Пустоты такого характера неоднократно фиксировались на карьерах Криворожского бассейна. Их параметры легче определить, чем в общем слу-

чае, т.к. теоретически у исследователя имеется для этого гораздо больше геофизической информации в связи с протяженностью процесса во времени. Вместе с тем эта информация должна систематически накапливаться в базах данных, фильтроваться и систематически анализироваться с целью выявления возможных пустот.

Из вышеизложенного следует, что достаточно остро стоит вопрос о создании автоматизированной системы управления – комплекса аппаратных и программных средств, предназначенных для автоматизированного поиска пустот в условиях горного предприятия, карьера шахты и т.д. В качестве основы построения такой системы требуется постоянный и детальный мониторинг всей доступной геофизической информации с оптимальным расположением геофизических датчиков. Оптимизация геометрии системы наблюдения в области возможной дислокации пустот является отдельной сложной задачей. Следующим элементом системы является база данных геофизической информации, в которую следует занести не только результаты измерений

геофизической информации, но и региональные колебания фиксируемых геофизических параметров. Здесь речь идет о фиксации глубоко расположенных аномалий, которые в данном случае носят паразитный характер и искажают результаты измерений поля локальных пустот, поэтому геофизическая информация должна быть отфильтрована от регионального фона. Также паразитное влияние на геофизическую информацию оказывают метеорологические осадки, которые могут существенно исказить результаты геофизических измерений.

Последний фактор, оказывающий влияние на геофизические измерения, – процесс добычи полезных ископаемых, который довольно медленно меняет измеряемые параметры. Учет этих двух факторов также представляет отдельную проблему.

Таким образом, необходимо создание сложной и интеллектуальной математической модели исследуемого пространства, которая бы могла постоянно эволюционировать и усложняться с накоплением геофизической информации. Для этого следует использовать объектно-ориентированные системы управления базами данных (СУБД).

Одним из главных элементов рассматриваемой автоматизированной системы является стадия математического моделирования, а именно: решение обратных задач математической физики, основанных на решении интегральных уравнений первого рода [1]. Практически анализ любой геофизической информации может быть приведен к такого рода уравнениям.

Они, в свою очередь, относятся к теории обратных некорректных задач, методы решения которых бурно развиваются в настоящее время [1, 2]. Как известно, обратными задачами называют задачи восстановления структуры объектов по косвенным данным. Такие задачи возникают в тех случаях, когда внутреннее строение физического объекта недоступно прямому исследованию, в то время как косвенная информация о структуре объекта может быть получена, например, в виде измеренных физических полей, собственных или представляющих собой отклик объекта на заданное внешнее воздействие. Наиболее распространенными и доступными являются результаты гравиметрии и магнитометрии. В дальнейшем в качестве основных геофизических полей будут рассмотрены только гравитационные, т.к. только такие поля систематически измеряются в условиях реального предприятия, для которого создается автоматизированная система. Кроме того, такая геофизическая информация наиболее универсальна.

Для задач гравиметрии особенностями строения объекта являются аномалии плотности в виде рудного тела либо пустот.

В научных исследованиях задача определения геометрии рудного тела и его состава широко известна [3], задача же локализации пустот является относительно новой. Следует заметить, что задача

обнаружения пустот имеет целый ряд существенных особенностей, которые позволяют отнести ее решение к отдельному классу задач гравиметрии:

- модуль градиента плотности для пустот гораздо выше, чем в случае определения рудного тела;
- наиболее важные задачи определения пустот являются эволюционными, пустоты не имеют четкой локализации в пространстве, иногда пустота "мигрирует" к поверхности с катастрофическим ее обрушением;
- пустоты имеют существенно меньший объем, чем рудное тело.

Эти особенности иногда затрудняют, а иногда и облегчают решение, во всяком случае, требуют разработки специфических методов решения такого класса задач.

Следует заметить, что не всякая задача определения пустот имеет однозначное решение. Рассмотрим вариацию известного примера [3]. Пусть задана область V , заполненная средой постоянной плотности единица, за исключением шаровой области, имеющей плотность два. Допустим, что из этого шара извлечено вещество таким образом, чтобы пустая шаровая полость размещалась в центре шара, причем объем полости равен половине объема шара плотности два. Рассмотрим вектор силы тяжести от масс, расположенных в области V , для точек наблюдения, которые лежат вне области среды V . Тогда вектор силы тяжести во всех точках среды T будет иметь одинаковое значение как для среды постоянной плотности один, заполняющую область V , так и для описанной выше составной среды переменной плотности. Это вытекает из классического результата И. Ньютона.

Для решения задач определения пустот используются различные методы. В работе исследованы методы решения этой задачи с помощью методов гравиразведки.

В общем виде решение задачи гравиразведки [3] приводит к многомерным интегральным уравнениям относительно неизвестной плотности $\rho(x, y, z)$ пространственно распределенных источников гравитационных аномалий. Функцию плотности будем называть в дальнейшем средой. Требуется в этих условиях определить неизвестное распределение плотности ρ во всей трехмерной области D . Для этого следует решить трехмерное интегральное уравнение первого рода:

$$G \int_D (z - z_0) \rho(x, y, z) / R^3 dV = F_z(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность среды; $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M_0 \in T$, D – исследуемая

область, в которой локализованы источники гравитационных аномалий. Через F_z обозначена вертикальная проекция силы тяжести в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от всей области D . Будем считать известными значения F_z в каждой точке области T (области измерений) за счет построения достаточно точных интерполяционных приближений сглаженных реальных измерений. Существенно то, что множество точек наблюдения T лежит вне области интегрирования D и, в частности, интеграл (1) является собственным. Такая задача в гравиразведке называется внешней [3].

В некоторых специальных случаях удобно рассматривать двухмерное гравитационное поле, не зависящее от одной из координат, например, поле, создаваемое длинным цилиндром с плотностью масс, не меняющейся в направлении образующей цилиндра. Такие носители масс являются удобными физическими абстракциями, приближенно описывающими поле реальных трехмерных гравитационных аномалий. В этом случае решение обратной задачи гравиметрии можно получить, решив двухмерное интегральное уравнение первого рода:

$$2G \iint_S \rho(x, z)(z - z_0) / R^2 dS = F_z(x_0, z_0). \quad (2)$$

Здесь $\rho(x, z)$ – известная плотность среды; $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, z_0)$; S – плоская область локализации источников гравитационных аномалий. Решение уравнения (2) проще (1), но это уравнение принципиально не может отразить всех особенностей локализации пустот. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать только уравнение (1).

Одним из эффективных способов решения некоторых типов обратной задачи гравиразведки, в частности, задачи определения пустот, является рассмотрение упрощенной бинарной среды, которая состоит из двух компонентов. Такая среда может иметь только два возможных значения плотности. Но законность такого предположения и его влияние на точность решения обратной задачи гравиразведки не была детально исследована. Данная работа посвящена изучению некоторых типов задач для бинарной среды. Также была предпринята попытка оценить погрешность решения обратной задачи гравиразведки при упрощающих предположениях о бинарности среды для некоторых типов дискретизации.

Следует заметить, что внешняя задача определения конфигурации пустот для бинарной среды и ограниченной области D всегда имеет единственное решение, что существенно. Это можно показать таким образом. Считаем, что среда бинарна, т.е. плотности среды могут принимать только два известных значения: ρ_1 и ρ_2 . Но определяющее значение для

задачи гравиразведки в этом случае имеет только величина $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, т.к. бинарная среда легко приводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно новых неизвестных ρ'_1 и ρ'_2 , где $\rho'_1 = \Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ и $\rho'_2 = 0$. Для этого достаточно из правой части (1) вычесть $G \int_D (z - z_0)\rho_2 / R^3 dV = F_z(x_0, y_0, z_0)$. Далее разделим результат на $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Теперь бинарная среда свелась к среде, где одной из возможных плотностей блоков будет нулевая, а другая имеет единичную плотность, эта задача эквивалентна предыдущей.

Докажем, что если решение уравнения (1) для ограниченной области D и описанной выше бинарной среды существует, то оно и единственно. Допустим, что имеется два различных решения – $\rho'(x, y, z)$ и $\rho''(x, y, z)$, гравитации от которых имеют одинаковое значение во всех точках наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$. Найдем разность этих решений:

$$\rho(x, y, z) = \rho''(x, y, z) - \rho'(x, y, z).$$

Тогда гравитация от непустого множества D_i во всех точках равна нулю, т.к. решения $\rho'(x, y, z)$ и $\rho''(x, y, z)$ не совпадают на некотором множестве D_N . Выберем среди всех точек наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$ точку M'_0 , имеющую максимальную координату z , если же таких точек несколько, то возьмем любую из них. Теперь рассмотрим интеграл (1) для этой точки наблюдения:

$$G \int_{D_N} (z - z_0)\rho(x, y, z) / R^3 dV = 0.$$

Заметим, что $G > 0$, $\rho(x, y, z) = 1$ и $z - z_0 \leq 0$, причем очевидно, что не для всех точек z выполняется равенство $z - z_0 = 0$. Следовательно, из теорем анализа [4] вытекает, что обязательно должно быть

$$G \int_{D_N} (z - z_0)\rho(x, y, z) / R^3 dV < 0.$$

Что касается вопроса существования решения уравнения (1) для ограниченной области D и бинарной среды при произвольной правой части, то очевидно, что решение не всегда существует, что является типичным для уравнений первого рода [1, 2]. Например, не существует решения уравнения интегрального (1), где правая часть равна нулю в точке M'_0 из предыдущего доказательства. Нахождение достаточных условий, которым должна удовлетворять правая часть интегрального уравнения (1) (даже в случае бинарной среды и ограниченной области D), чтобы существовало решение, в данной статье рассматриваться не будет.

Влияние общих свойств среды (объемной функции плотности) и их учет оказывается решающим при разработке эффективных и устойчивых методов решения интегральных уравнений первого рода (1) и

(2) [3, 5]. Заметим, что не всякая функция среды реализуемая, т.е. не все плотности могут быть реализованы и реально существуют в природе. Еще более узкий класс сред и их свойств актуален для исследования в заданных условиях конкретного железорудного бассейна, месторождения, карьера. Как уже говорилось, не для всякой реальной среды существует единственное решение. Наконец, при адаптации разрабатываемых методов следует привязываться к условиям конкретной среды, что позволяет полностью использовать ее особенности. Но если разрабатывать достаточно универсальные методы решения геофизических задач, то следует изучить вопросы решения уравнений (1) и (2) в достаточной общей постановке. Целью настоящей работы является рассмотрение данных вопросов.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.

Будем рассматривать трехмерный случай как наиболее общий. Рассмотрим пока несколько более общее интегральное уравнение, чем (1). Теоретически удобно считать, что в точках наблюдения известны все три составляющие силы тяжести, хотя на практике всегда будем использовать только F_z . Дискретизируем область D на совокупность конечных, односвязных, замкнутых объемов (элементов)

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i. \text{ Объемы } D_i \text{ могут пересекаться либо по}$$

общей стороне, либо иметь только общие ребра, либо вершины, либо не иметь общих точек вообще. Таким образом, объем (мера) пересечения этих элементов всегда равен нулю. Обозначим S_{ij} общую сторону этих объемов, если она есть.

По каждому из объемов D_i массы могут быть распределены с постоянной либо переменной плотностью, эти объемы будем выбирать таким образом, чтобы внутри каждого из них среда была относительно однородной и непрерывной. Будем в дальнейшем различать три типа среды: пустоты, руду и породу. Различие между плотностями руды и породы здесь не столь существенно, эти категории выделяем для возможного количественного использования информации о геометрии и составе рудного тела. Относительная однородность в данном контексте означает, что пустоты, порода или руда не могут принадлежать одному объему одновременно, градиент от функции плотности внутри элемента постоянен либо меняется незначительно. Для физически реализуемых сред условие относительно однородной и непрерывной среды в рамках одного объема может выполнено даже при относительно равномерной и крупной дискретизации. Следовательно, $D = D_R \cup D_{PR} \cup D_P$, где D_R – объединение элементов, которые составляют область руды; D_{PR} – породы; D_P – область пустот.

Запишем интегральный оператор уравнения (1) в виде

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho(x, y, z) \bar{R} / R^3 dV, \quad (3)$$

где $\rho(x, y, z)$ – функция плотности; N – общее число объемов.

Из векторного анализа [6] известно:

$$\nabla(fg) = \nabla fg + f \nabla g, \quad (4)$$

где $f = f(x, y, z)$, $g = g(x, y, z)$ – скалярные функции от трех переменных; ∇ обозначен градиент функции. В трехмерном случае

$$\nabla(1/R) = \bar{R} / R^3, \quad (5)$$

здесь $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Заметим, что из (5) вытекает, что

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho \nabla(1/R) dV. \quad (6)$$

Из анализа известна теорема о градиенте [6]:

$$\iiint_D \nabla(U) dV = \iint_S \bar{n} U dS. \quad (7)$$

Пусть $f = \rho$ – плотность среды, а $g = 1/R$, тогда можно записать, используя (4):

$$\sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla(\rho/R) dV = \bar{I}_1 + \bar{I}_2, \quad (8)$$

где $\bar{I}_1 = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho \nabla(1/R) dV$; $\bar{I}_2 = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV$.

Однако в (8)

$$\sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla(\rho/R) dV = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \bar{n}_i \rho / R dS, \quad (9)$$

здесь S_i – поверхность, ограничивающая объем D_i ; \bar{n}_i – внешняя нормаль к поверхности S_i . Нормаль \bar{n}_i в (9) является векторной функцией точки поверхности. Следовательно,

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \bar{n}_i \rho / R dS - \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV$$

или

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \bar{n}_i \rho / R dS - \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV, \quad (10)$$

Это основная формула, на основании которой упрощается анализ интегрального оператора (3) и его свойств в зависимости от функции плотности $\rho(x, y, z)$, области D , ее дискретизации D_i , величины и расположения области наблюдения T относительно D . Преобразование (10) расщепляет источники силы тяжести на поверхностные \bar{I}_1 и объемные \bar{I}_2 .

Интеграл \bar{I}_1 зависит от источников поля тяжести, распределенных только на поверхности элементов дискретизации, он играет первостепенную роль

при определении величины и локализации пустот. Если два элемента D_1 и D_2 имеют общую поверхность S_{12} , т.е. $D_1 \cap D_2 = S_{12}$, то на ней функция плотности в точке $M(x, y, z)$ будет равна

$$\bar{n}_1(\rho_1 - \rho_2) = \bar{n}_2(\rho_2 - \rho_1),$$

где \bar{n}_1, \bar{n}_2 – внешние нормали к поверхности S_{12} для элементов D_1 и D_2 , соответственно. Через ρ_1, ρ_2 обозначены пределы функции плотности в точке $M(x, y, z)$ со стороны для элементов D_1 и D_2 . Будем называть скачком нормальной плотности величину

$$\bar{n}_1(\rho_1 - \rho_2) = \bar{n}_2(\rho_2 - \rho_1). \quad (11)$$

Если же функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна на множестве из двух объемов $V_{12} = D_1 \cup D_2$ и они имеют общую поверхность $S_{12} = D_1 \cap D_2$, то на S_{12} скачок плотности будет равен нулю, суммарный интеграл по S_{12} для \bar{I}_1 также будет равен нулю. Таким образом, интеграл \bar{I}_1 в выражении (10) будет отличен от нуля только для тех поверхностей, где $\rho_1 \neq \rho_2$, либо для тех поверхностей, которые не являются общими для каких-то объемов. Такая ситуация возникает для следующих поверхностей:

- 1) на поверхности Земли (верхней стороне D);
- 2) на нижней стороне D ;
- 3) на боковых сторонах D ;
- 4) на поверхности элементов, где функция плотности терпит разрыв между соседними элементами по геологическим причинам;
- 5) на поверхности пустот.

В случаях 1–3 легко учесть: на поверхности Земли плотность среды известна, влиянием боковых сторон D , а тем более нижней стороны D на поле силы тяжести в области наблюдения T (на поверхности Земли) можно пренебречь, считая эти области весьма удаленными от T . Что же касается возможных естественных разрывов функции плотности, обусловленных геологическими причинами, то если есть большие скачки нормальной плотности (11) на границе некоторых соседних объемов и они имеют существенную долю среди всех D_i , то они сыграют роль естественных “помех”. В таком случае преобразование (10) нецелесообразно, т.к. будет трудно различать скачки естественные нормальной плотности и такие же скачки, обусловленные наличием полостей. В этом случае следует непосредственно решать дискретизированное уравнение (1).

Теоретическим примером такой среды может быть грунт (среда с низкой постоянной плотностью), содержащий одинаковые железные шары (среда с высокой постоянной плотностью), которые располагаются регулярно в пространстве, например, в узлах прямоугольной решетки, при условии, что суммарный объем таких шаров в общем объеме D значителен (10–20 % и более).

Если же функция плотности непрерывна на D , то преобразование (10) целесообразно, т.к. в этом случае естественные “помехи” отсутствуют. Для таких сред только поверхностная плотность на поверхности пустот оказывает влияние на величину интеграла \bar{I}_1 .

Теперь изучим влияние дискретизации на уравнение (10), точнее, на \bar{I}_1 . Будем считать область D и объемы D_i прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат. В этом случае вектор нормали \bar{n}_i – постоянные векторы и их можно вынести из-под знака поверхностного интеграла в (10). В гравиразведке рассматривается и измеряется только вертикальная составляющая силы тяжести – F_z .

Поэтому будем рассматривать только z -составляющую суммы интеграла $\bar{I}_1: I_{1z} = \sum_{i=1}^N I_{zi}$.

Очевидно,

$$I_{zi} = I_{z2i} - I_{z1i}, \quad (12)$$

где
$$I_{z2i} = \iint_{S_{2i}} \rho(x, y, z_{2i}) / R dS$$
 и
$$I_{z1i} = \iint_{S_{1i}} \rho(x, y, z_{1i}) / R dS.$$

Здесь S_{2i}, S_{1i} – верхнее и нижнее основание D_i , которые параллельны плоскости Oxy , z_{i2}, z_{i1} – постоянные координаты граней S_{2i}, S_{1i} . Знак минус появился в (12) потому, что внешняя нормаль к S_{1i} и ось Oz направлены в противоположную сторону.

Определим погрешность P_i вычисления интеграла (12), предполагая, что на верхнем и нижнем основании S_{2i}, S_{1i} объема D_i функцию плотности заменяем постоянными, равными ρ_{i2}, ρ_{i1} :

$$P_i = \iint_{S_{2i}} (\rho - \rho_{i2}) / R dS - \iint_{S_{1i}} (\rho - \rho_{i1}) / R dS = P_{i2} - P_{i1}.$$

Далее $|P_i| \leq |P_{i1}| + |P_{i2}|$ и

$|P_{i1}| \leq |\rho(x, y, z_{i1}) - \rho_{i1}| S_i / R_{i1}$ аналогично $|P_{i2}| \leq |\rho(x, y, z_{i2}) - \rho_{i2}| S_i / R_{i2}$. Здесь R_{i1}, R_{i2} – минимальные расстояния от вершин оснований S_{2i}, S_{1i} до точки наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$; S_i – площадь оснований верхнего и нижнего основания прямоугольного параллелепипеда D_i . Обозначим $\varepsilon_{i1} = |\rho(x, y, z_{i1}) - \rho_{i1}|$, $\varepsilon_{i2} = |\rho(x, y, z_{i2}) - \rho_{i2}|$.

Для погрешности вычисления коэффициентов СЛАУ при определении плотностей дискретизированного интегрального уравнения будет справедлива оценка:

$$|P_i| \leq S_i (\varepsilon_{i1} / R_{i1} + \varepsilon_{i2} / R_{i2}).$$

Если $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = \varepsilon$ для любого i , то

$$|P_i| \leq \varepsilon S_i (1 / R_{i1} + 1 / R_{i2}) = \varepsilon C_i. \quad (13)$$

Здесь константа C_i зависит от точки наблюдения и параметров дискретизации, величина ε – от геологической информации.

Из (13) следует, что для минимизации погрешности следует производить неравномерную дискретизацию по "слоям": вблизи области наблюдения дискретизацию среды нужно производить как можно мельче, далее – крупнее. Кроме того, выражение (13) показывает, что даже в случае непрерывной функции плотности, для которой интеграл \bar{I}_1 по (10) вычисляется абсолютно точно, дискретизация вносит погрешности, величина которых зависит от параметров дискретизации и величины возможной вариации функции плотности.

Теперь рассмотрим интеграл

$$\bar{I}_2 = \sum_{i=1}^N \iiint_D \nabla \rho / R dV .$$

Интеграл \bar{I}_2 носит вспомогательный характер, но может быть с успехом использован при теоретическом моделировании различных сред, для проверки эффективности различных методов решения задачи гравиразведки и учета влияния помех в виде переменных параметров среды. В этом его основное значение. Этот интеграл может быть тождественно равен нулю для широкого класса сред, например, для сред с кусочно-постоянной функцией плотности. В частности, для случая среды с пустотелым шаром, рассмотренным в начале данной работы, этот интеграл равен нулю.

Как правило, на практике колебания градиента среды очень невелики и носят случайный характер, потому их влияния взаимно компенсируются и \bar{I}_2 близок к нулю. Кроме того, не следует забывать: реально нас интересует только компонента I_{2z} , которая может быть существенно меньше, чем $|\bar{I}_2|$.

Геологическая информация о величине $\nabla \rho$ практически всегда отсутствует, кроме редкого на практике случая, когда достаточно точно известно расположение и строение рудного тела. В этом случае следует вычислить \bar{I}_2 аналитически или по кубатурным формулам. Затем следует перенести известное значение \bar{I}_2 в правую часть дискретизированного интегрального уравнения (1).

Алгоритм расчета коэффициентов СЛАУ. Представление (10) дает существенные вычислительные выгоды для ряда реальных сред. Для вычисления I_{zi} в случае, если объемы D_i – прямоугольные параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат, нужно взять поверхностный интеграл вида

$$I = \iint_S dS / R \quad (14)$$

только по двум граням из шести. Здесь S – прямоугольник со сторонами, которые параллельны осям

Ox, Oy ; плоскость S перпендикулярна оси Oz ; $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$; $M_0 \in T$.

Интеграл (14) может быть вычислен в конечном виде в элементарных функциях для прямоугольной области S . По верхнему основанию объема D_i он равен:

$$I_{z2i} = V_{22} - V_{21}, \quad (15)$$

где $V_{22} = F(x'_2, y'_2, z'_2) - F(x'_1, y'_1, z'_2)$;
 $V_{21} = F(x'_1, y'_2, z'_2) - F(x'_1, y'_1, z'_2)$.

Здесь $x'_2 = x_2 - x_0$; $x'_1 = x_1 - x_0$; $y'_2 = y_2 - y_0$;
 $y'_1 = y_1 - y_0$; $z'_2 = z_2 - z_0$; $z'_1 = z_1 - z_0$.

Аналогично интеграл (14) по нижнему основанию объема D_i равен: $I_{z1i} = V_{12} - V_{11}$, где $V_{12} = F(x'_2, y'_2, z'_1) - F(x'_1, y'_1, z'_1)$;
 $V_{11} = F(x'_1, y'_2, z'_1) - F(x'_1, y'_1, z'_1)$.

Здесь обозначено:

$$F(u, v, w) = uL(v + R) + vLn(u + R) - wArctg(uv / (wR)), \quad (16)$$

где $R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.

Выражение (15) является многомерным аналогом формулы Ньютона-Лейбница. Она получена путем последовательного нахождения неопределенных интегралов по переменной x и затем y , и в результате получена "первообразная" (16). Следует отметить, что в (16) есть еще слагаемые, но они взаимно уничтожаются при вычислении (15). Выражение (15) есть линейная комбинация значений выражения (16) в вершинах объемов D_i .

Отсюда вытекает первый способ оптимизации расчета коэффициентов матрицы СЛАУ для решения дискретизированного уравнения (1), которые представляют собой интегралы $I_Z^{JK} = \iint_{S_2} dS / R - \iint_{S_1} dS / R$, где поверхности S_2 и S_1 ограничивают объем D_{JK} сверху и снизу. Здесь $I = 1, Nx$; $J = 1, Ny$; $K = 1, Nz$. Следует вычислить функцию (16) в узлах прямоугольной трехмерной сетки, которую образует $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$. Из полученных значений формируем интеграл (14) для каждой области D_i . Пусть область D разбита на $N = N_x N_y N_z$ объемов, где N_x, N_y и N_z – число делений области D по осям Ox, Oy и Oz , соответственно. Тогда требуется вычислить функцию (16) в $M = (N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$ точках. Будем называть этот способ алгоритмом 1.

Стандартный метод расчета коэффициентов матрицы СЛАУ для решения дискретизированного уравнения (1) сводится к вычислению функции (16) в $8N_x N_y N_z$ точках. Этот алгоритм будем называть стандартным, поэтому предложенный алгоритм 1 расчета коэффициентов СЛАУ является более эффективным, а именно: теоретически он будет быстрее стандартного в $KU = 8N_x N_y N_z / [(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)]$ раз, здесь KU – теоретический коэффициент ускорения.

Можно предложить и второй вариант эффективного алгоритма на основании (14). Будем вычислять коэффициенты СЛАУ "послойно". Для этого зафиксируем слой $K=1$ и вычислим значения функции (16) во всех $(N_x + 1)(N_y + 1)$ точках верхнего и нижнего "слоя". После этого сформируем коэффициенты СЛАУ, которые относятся к "слою" K . Затем достаточно вычислить значения функции (16) во всех $(N_x + 1)(N_y + 1)$ точках верхнего "слоя", а значения нижнего уже вычислены на предыдущем шаге, это старые значения верхнего "слоя". Число операций и в первом, и во втором случае оптимизации примерно равны, но второй алгоритм требует значительно меньше динамической памяти, чем первый. Будем называть этот способ алгоритмом 2.

Следует заметить, что значение функции (16) в алгоритмах 1 и 2 вычисляется в каждой вершине трехмерной сетки, которую образует $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, только один раз, в стандартном алгоритме эта функция будет вычисляться восемь раз в каждом внутреннем узле трехмерной прямоугольной сетки.

Для выяснения реальной степени эффективности алгоритмов 1 и 2 и сравнения их со стандартным алгоритмом были проведены численные эксперименты с различными параметрами дискретизации N_x, N_y, N_z . Для удобства полагалось $N=N_x=N_y=N_z$. Эта величина указана в левой колонке табл. 1. Во второй колонке приведен $KU = 8N_x N_y N_z / [(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)]$ – теоретический коэффициент ускорения предложенных алгоритмов 1 и 2 по сравнению со стандартным по количеству операций. В следующих двух колонках приведены реальные коэффициенты ускорения алгоритмов 1 и 2 относительно стандартного. Они вычислялись путем сравнения времени выполнения стандартного алгоритма и алгоритмов 1 и 2: $KUS_i = T_s / T_i$; $i = 1, 2$. Наконец, в правой колонке указан коэффициент ускорения первого алгоритма относительно второго: $KU_{12} = T_1 / T_2$. Для повышения точности эксперимента процесс расчета каждого алгоритма повторялся заданное число раз (50–1000), при этом учитывалось общее время расчета. При каждом значении N численные эксперименты производились 3–5 раз, результат усреднялся.

Таблица 1 – Коэффициенты ускорения алгоритмов 1 и 2 относительно стандартного алгоритма

N	Теор. KU	KUS_1	KUS_2	KU_{12}
30	7,2505	4,48148	4,653846	0,96296296
40	7,4288	4,4705882	4,691358	0,95294118
50	7,5386	4,6144578	4,670731	0,98795181
60	7,6130	4,4700461	4,685990	0,95391705
70	7,6667	5,2650602	5,355392	0,98313253
80	7,7073	5,8106796	6,401069	0,90776699
90	7,7242	4,7447405	5,369841	0,88359046
100	7,7526	4,2180775	4,827586	0,87374462
110	7,7857	4,0909091	4,814815	0,84965035
120	7,8033	3,7555556	4,828571	0,77777778
130	7,8182	3,5740741	4,873737	0,73333333
140	7,8310	3,468391	4,808765	0,72126437
150	7,8421	3,3866667	4,807571	0,70444444
160	7,8519	3,3304348	4,910256	0,67826087
170	7,8605	3,188811	4,903226	0,65034965
180	7,8681	3,2	4,814159	0,66470588
190	7,8750	3,1683168	4,848485	0,65346535
200	7,8812	3,1921543	4,81545	0,66289894

Результаты численных экспериментов показывают максимальное ускорение первого и второго алгоритмов при $N=80$ (рис. 1). При росте уровня дискретизации происходит уменьшение степени производительности относительно стандартного алгоритма, причем производительность первого алгоритма падает быстрее. Это связано, прежде всего, с использованием больших объемов динамической памяти. Второй алгоритм использует динамическую память экономнее, и показатели у него лучше, реальный коэффициент ускорения почти равен пяти. Можно рекомендовать вычислять коэффициенты СЛАУ поблочно, наиболее оптимальный объем блока определяется параметрами дискретизации $N=80$. На рис. 2 приведено отношение средних времен расчета коэффициентов СЛАУ при различных N . При возрастании N видна устойчивая тенденция улучшения временных показателей второго алгоритма относительно первого. Как уже было сказано выше, это связано с ростом нагрузки на динамическую память.

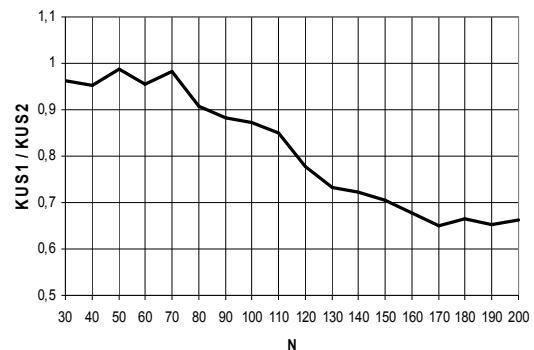


Рисунок 1 – Зависимость коэффициентов ускорения алгоритмов 1 и 2 от параметра дискретизации N

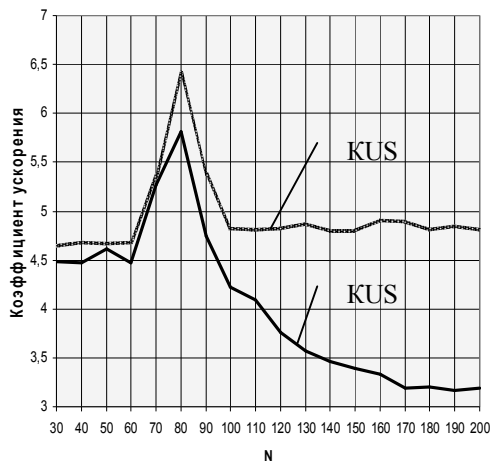


Рисунок 2 – Отношение коэффициентов ускорения алгоритмов 1 и 2 в зависимости от N

ВЫВОДЫ. 1. Предложен метод упрощения процесса решения многомерных интегральных уравнений гравиразведки путем разделения скалярных источников поля на поверхностные и объемные.

2. Получены оценки погрешности вычисления коэффициентов СЛАУ при переходе к кусочно-постоянной аппроксимации функции плотности поверхностных источников.

3. Предложены два эффективных алгоритма расчета коэффициентов СЛАУ для определения неизвестных значений плотности среды.

4. Проведены численные эксперименты для оценки реальной степени эффективности предложенных алгоритмов 1 и 2. Выявлен устойчивый максимум относительной производительности в зависимости от величины дискретизации трехмерной области D . Определен наиболее эффективный объем блока при вычислении коэффициентов СЛАУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под редакцией Мудрецової Е.А. – М.: Недра, 1990. – 608 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 2. – 864 с.
5. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наукова думка, 1978. – 228 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

INVESTIGATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR SOLVING GRAVITY PROBLEM LOCALIZATION OF CAVITY

P. Smolyanskiy, T. Kozikova

Krivoy Rog National University

ul. Lermontova, 13/48, Krivoy Rog, 50002, Ukraine. E-mail: sirius.ps@gmail.com

Search voids manmade and natural is becoming more urgent task at present. To monitor them to build a search engine voids the automated control system mining company. One of the main conditions is to build the model subsystem solution of integral equations of the first kind for a variety of geophysical fields, including gravity, as the most accessible and universal field. Solution of integral equations of the first kind with the theory of ill-posed inverse problems, which is booming at the moment.

By the authors propose a method for simplifying the process of solving multidimensional integral equations of the first kind by dividing the scalar field sources on the surface and volume. Error estimates calculate the coefficients of linear algebraic equation in the transition to a piecewise constant approximation of the density of surface sources.

Key words: localization of voids, the inverse problem, integral equations, approximation, numerical modeling.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N. and Samarskiy, A.A. (1986), *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems], Nauka, Moscow, Russia. (in Russian)
2. Verlan, A.F. and Sizikov, V.S. (1986), *Integralnye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equation methods, algorithms and programs], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine. (in Russian)
3. Mudretsova, E.A. (1990), *Gravirazvedka. Spravochnik geofizika* [Gravimetric. Directory of geophysics], Nedra, Moscow, Russia. (in Russian)
4. Fikhtengolts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. Tom 2* [A course in differential and integral calculus. Vol. 2], Fizmatlit, Moscow, Russia. (in Russian)
5. Starostenko, V.I. (1978), *Ustoychivye chislennyye metody v zadachakh gravimetrii* [Stable numerical methods in gravity], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine. (in Russian)
6. Korn, G. and Korn, T. (1974), *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, theorems, formulas], Nauka, Moscow, Russia. (in Russian)

Стаття надійшла 19.08.2013.