

УДК 517.982.43:621.3.011.72.001.12

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С РЯДАМИ ФУРЬЕ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**Д. И. Родькин, В. В. Ченчевой, Е. Б. Кобыльская**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: vladchen.86@gmail.com, leca91@ya.ru

В последние годы развивается математический аппарат исследования энергетических режимов электрических цепей, анализа процессов преобразования энергии в нелинейностях, идентификации параметров электрооборудования с использованием теории мгновенной мощности, в основу которого положены методы преобразования сигналов, представляемых в форме аппроксимационных зависимостей, в частности, рядов Фурье. Как правило, анализируются процессы, при описании которых используются нелинейные операции с рядами Фурье – их умножение, деление, возведение в степень и т.п. Сложность этих операций практически исключает получение аналитических выражений для описания окончательных зависимостей. При выполнении этих математических действий чаще всего используется операция свертки, нашедшая широкое применение при работе с сигналами в радиотехнике. Упомянутые операции доступны для исследователя в форме известных прикладных математических программ. В электротехнических задачах указанного выше характера возможно использование решений, получаемых без полного использования вычислительных средств. При этом решается попутно и другая задача – изучение механизма свертки и получение промежуточных результатов как исходного материала для определения конкретных данных анализируемых процессов. В работе акцентируется внимание на вопросах получения результатов с использованием рядов с конечным числом входящих в них членов.

**Ключевые слова:** ряды Фурье, умножение рядов, мгновенная мощность электрических сигналов, идентификация параметров нелинейностей.

## НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ З РЯДАМИ ФУР'Є В ЗАСТОСУВАННІ ДО ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

**Д. Й. Родькін, В. В. Ченчевой, О. Б. Кобильська**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: vladchen.86@gmail.com, leca91@ya.ru

Останніми роками розвивається математичний апарат дослідження енергетичних режимів електричних ланцюгів, аналізу процесів перетворення енергії в нелінійностях, ідентифікації параметрів електрообладнання з використанням теорії миттєвої потужності, в основу якого покладено методи перетворення сигналів, які подаються у формі апроксимаційних залежностей, зокрема рядів Фур'є. Зазвичай аналізуються процеси, під час опису яких використовуються нелінійні операції з рядами Фур'є – їх множення, ділення, піднесення до степеня та ін. Складність цих операцій практично виключає отримання аналітичних виразів для опису остаточних залежностей. При здійсненні цих математичних дій, як правило, використовується операція згортки, що знайшла широке застосування при роботі із сигналами в радіотехніці. Згадані операції доступні для дослідника у формі відомих прикладних математичних програм. В електротехнічних задачах зазначеного вище характеру можливе використання рішень, одержуваних без повновагового використання обчислювальних засобів. При цьому вирішується попутно й інша задача – вивчення механізму згортки та отримання проміжних результатів як вихідного матеріалу для визначення конкретних даних аналізованих процесів. У роботі акцентується увага на питаннях отримання результатів із використанням рядів з кінцевим числом вхідних у них членів.

**Ключові слова:** ряди Фур'є, множення рядів, миттєва потужність електричних сигналів, ідентифікація параметрів нелінійностей.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** В исследованиях при анализе энергетических процессов в электротехнических системах и комплексах осуществляются операции над функциональными зависимостями в форме точных математических или аппроксимационных выражений [1–6]. Действия над ними зависят от природы явлений и стремления получить приемлемые результаты; операции над зависимостями достаточно условно можно разделить на линейные и нелинейные. Если к первым можно отнести операции сложения и вычитания (операции суммирования), то к нелинейным – операции умножения, деления, возведения в степень и т.п. В тех случаях, когда анализируются процессы посредством сложных математических зависимостей, операции умножения, деления осуществить аналитическими приемами без привлечения средств вычислительной

техники с соответствующим программным обеспечением затруднительно [7, 8]. Несмотря на имеющуюся в настоящее время возможность получения приемлемых результатов с использованием современных технологий за приемлемое время, возникает необходимость определения промежуточных результатов в аналитической форме как основы вычисления приблизительных решений создания для эффективных информационных устройств и систем [3, 4, 9, 10]. Промежуточная информация в достаточно полном объеме позволяет рассматривать энергетический процесс с учетом особенностей и характеристик генерирования, энергообмена, рассеивания, аккумуляирования энергии [9, 11, 12].

Рассматривая задачу несколько с другой позиции – позиции использования энергетических методов для задач непосредственного анализа энергопроцесса,

идентификации параметров электрооборудования современными методами, приходится констатировать, что нелинейные операции с функциональными зависимостями, описывающими энергопроцессы, являются единственным инструментом для получения ожидаемых результатов. Так как в указанных задачах в основном используются в качестве аппроксимирующих функций тригонометрические ряды Фурье, то становится очевидной необходимость умножения, возведения в степень, деления указанных рядов [8]. Такие задачи реализуются с помощью специальных математических приемов, в частности, путем использования широко известной операции свертки при обработке непрерывных дискретных сигналов [7, 8, 13]. Нелинейные преобразования при умножении, делении, возведении в степень рядов заключаются прежде всего в преобразовании частот, вследствие чего в результирующих сигналах не содержатся гармонические из состава исходных зависимостей. Это свойство представляется достаточно важным, т.к. позволяет осуществлять разделение результирующих сигналов по частотному признаку, что, в свою очередь, делает возможным составление уравнений энергетического баланса мгновенной мощности на соответствующей частоте ее измерения или преобразования [8, 10, 12, 14].

Материал предлагаемого исследования проиллюстрирован примером определения параметров изменяемой во времени нелинейности с использованием аппроксимирующих функций в форме рядов Фурье как исходных для операций умножения и деления.

В задачах электромеханики и энергетики находят применение энергетический метод исследования, заключающийся в использовании тригонометрических функций – аппроксимационных зависимостей токов, напряжений, моментов, скорости вращения в форме тригонометрических рядов, их произведений, частных и т.д. [5, 8, 9, 13, 15]. Результаты этих операций при этом являются исходным материалом при решении задач идентификационного характера, при оценке показателей энергопроцессов и т.п. [16–18]. Этот метод базируется на использовании разложений периодических и непериодических функций в ряд Фурье на соответствующем интервале с последующим умножением составляющих, что, по существу, интерпретирует закон сохранения на заданном интервале в форме уравнений баланса на разных частотах [19].

В исследованиях указывалось, что использование энергетического метода предполагает получение функций мгновенной мощности на каждом из элементов схемы замещения в форме произведений напряжения на ток, момента на скорость и т.д., в зависимости от того, какова физическая природа процессов преобразования энергии на соответственном элементе схемы замещения. Следующим шагом является представление мгновенной мощности в форме рядов Фурье на интервале повторяемости процессов. Так как процессы преобразования энергии проходят синхронно на каждом из элементов и эти процессы выражены гармоническими функциями

ми синуса и косинуса соответствующих частот, то с учетом того, что период разложения зависимости  $P(t)$  один и тот же на любом из элементов схемы замещения, появляется возможность получения уравнений баланса мощностей: постоянных составляющих и ее знакопеременных компонент. При этом уравнения баланса составляющих мгновенной мощности для источника питания и элементов схемы замещения формируются независимо друг от друга [12, 16, 17]:

– уравнения баланса постоянных составляющих мгновенной мощности для источника питания и элементов схемы замещения;

– уравнения баланса косинусных составляющих мгновенной мощности для источника питания и элементов схемы замещения;

– уравнения баланса синусных составляющих мгновенной мощности для источника питания и элементов схемы замещения.

Следует отметить, что при составлении уравнений энергобаланса базовой является математическая интерпретация зависимости мгновенной мощности на интервале разложения с помощью рядов Фурье [5, 9, 10]. При этом математическая база, во-первых, выступает как аппроксимационный аппарат мгновенной мощности на интервале разложения, во-вторых, метод наиболее удобен, т.к. позволяет в отличие от других методов аппроксимации (например, аппроксимации с помощью полиномов) получить достаточное число уравнений энергобаланса – постоянные составляющие, а также по два уравнения для каждой значащей знакопеременной составляющей мгновенной мощности – синусной и косинусной. При полиномиальной аппроксимации уравнения баланса могут формироваться из составляющих соответствующих степеней, причем общее количество уравнений энергобаланса будет меньше, чем при аппроксимации тригонометрическими рядами [15, 17–19].

Решение идентификационных задач любым из методов, как правило, наталкивается на недостаточное число уравнений в идентификационной системе, причем это связано со значительным числом гармонических составляющих мощности. С одной стороны это зависит от числа гармоник, аппроксимирующих кривую мощности, а с другой – от числа компонент, входящих в произведение составляющих, формирующих сигнал мгновенной мощности. Следует указать на отличительную особенность произведения тригонометрических рядов. Она проявляется в том, что от числа гармонических функций в произведении, выражающем мощность, число результирующих разночастотных компонент стремительно возрастает с ростом. Так, например, при умножении косинусов с двумя частотами число результирующих компонент равно двум с частотами  $\Omega_1 = \omega_1 + \omega_2$  и  $\Omega_2 = \omega_1 - \omega_2$ . При умножении трех составляющих результирующее число компонент равно четырем, а в целом при  $m$  сомножителях число компонент определяется выражением

$$K_{\Sigma} = 2^{m-1}, \quad (1)$$

где  $K_{\Sigma}$  – число компонент с разными частотами в результате умножения  $m$  гармонических функций разных частот. Быстрый рост  $K_{\Sigma}$  подтверждает ранее сделанный вывод в отношении целесообразности использования тригонометрических рядов при аппроксимации кривой мгновенной мощности для создания математической базы энергетического метода. Увеличение числа составляющих является предпосылкой для использования энергетического метода при решении идентификационных задач применительно к устройствам с достаточно сложными схемными структурами, а также содержащих нелинейности [10, 14, 15].

Целью исследования является расширение возможностей использования метода мгновенной мощности при решении задач оценки энергетических режимов, идентификации параметров устройств и систем путем использования результатов нелинейных преобразований рядов Фурье, а именно – операций их умножения, деления, возведения в степень.

#### МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.

Использование тригонометрических рядов нашло исключительно широкое применение в исследовательской и инженерной практике благодаря возможностям представления сигналов в форме гармонических функций с разными частотами. Элементы гармонического анализа находят достаточно широкое применение в преобразовательной технике, при анализе показателей энергопроцессов; в целом ряде задач тригонометрические ряды выступают как один из наиболее эффективных способов аппроксимации достаточно сложных функциональных зависимостей. Реже решаются задачи анализа зависимостей или процессов, представленных не в форме сумм отдельных функций, а в форме их произведений, частных, степеней и т.п. в предположении, что искомые функциональные зависимости – также тригонометрические ряды [5, 8, 10]. Задачи подобного рода – не редкость в инженерной практике, в частности, при анализе энергопроцессов в электрических цепях, когда анализируемый параметр – мощность электрических сигналов – представляется в форме произведения функциональных зависимостей напряжения и тока, каждая из которых, вполне очевидно, может быть представлена своим гармоническим рядом.

В практическом применении умножение и деление рядов наиболее часто встречается при определении параметров энергетического режима: определения составляющих мгновенной мощности в сетях с несинусоидальными напряжениями и токами в преобразовательных системах различного функционального назначения, при исследовании режимов работы нелинейностей, идентификации параметров электротехнических устройств. Определение составляющих мгновенной мощности достаточно детально изложено в научной литературе [3, 6, 10]. Характерно, что основной задачей является умножение функциональных зависимостей  $U(t)$  и  $I(t)$ , которые, как правило, аппроксимируются то ли полиномами соответствующих степеней, то ли три-

гонометрическими рядами с конечным числом гармонических. Исследователь при этом руководствуется определенными соображениями при выборе первого или второго вариантов. В силу того, что при анализе энергетических вопросов чаще всего приходится иметь дело с синусоидальными или несинусоидальными периодическими зависимостями, то, как правило, пользуются аппроксимационными выражениями для  $U(t)$  и  $I(t)$  в форме тригонометрических рядов.

В задачах исследования и идентификации нелинейностей математические аспекты могут быть существенно сложнее, чем при определении энергетических показателей в несинусоидальных режимах. Для иллюстрации укажем установившуюся классификацию элементов электрических цепей на линейные, нелинейные, параметрические, нелинейно-параметрические. При этом нелинейные – это те характеристики, параметры которых зависят от одного или нескольких параметров, характеризующих режим (тока, напряжения, температуры и т.п.); параметрические нелинейности имеют характеристики, зависящие от времени, т.е. параметры изменяются соответствующим образом по заданному алгоритму; нелинейно-параметрические – те, которые зависят как от параметров режима работы, так и от времени. Общее свойство нелинейных элементов – в сложности процессов, протекающих в них при периодических воздействиях со стороны источника питания или нелинейного элемента. Упомянутая сложность происходит прежде всего из-за частотных преобразований, неизбежно возникающих при взаимодействии меняющихся во времени сигналов и параметров нелинейных элементов. При этом необходимость умножения рядов возникает как при определении зависимостей энергетического характера, так и при анализе простейших уравнений электрического равновесия.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из источника постоянного напряжения  $U$  и изменяющегося сопротивления

$$R(t) = R_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} R_i(t) - \text{активного сопротивления. Для}$$

иллюстрации представлены зависимости сопротивления, меняющегося во времени, тока, проходящего по цепи при  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R(t) = 10 + 5 \sin \Omega t + 4 \sin 2\Omega t$ ,  $\Omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . В результате изменения сопротивления во времени по цепи проходит ток

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \sin(m\Omega t - \phi_m) = \\ &= I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_{ma} \cos(m\Omega t) + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_{mb} \sin(m\Omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $I_{ma}$ ,  $I_{mb}$  – квадратурные компоненты составляющей тока с относительной частотой  $m$ ;  $\phi_m$  – фазовый сдвиг  $m$ -ой гармоники тока.

Из приведенных на рис. 1 кривых видно, что даже при указанном простейшем законе изменения

сопротивления протекающий по цепи ток имеет сложный гармонический состав. В результате можно записать равенство

$$U(t) = R(t)I(t) = \left( R_0 + \sum_0^{i=2} R_i \sin(\Omega t) \right) \times \left( I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \sin(m\Omega t - \phi_m) \right), \quad (3)$$

в котором очевидна операция умножения рядов так же, как и в случае определения мощности [8, 10]. Результат значительно усложняется, если напряжение питания также носит периодическую форму; в особенности возрастает сложность, если периоды изменения переменных составляющих напряжения и тока неодинаковы.

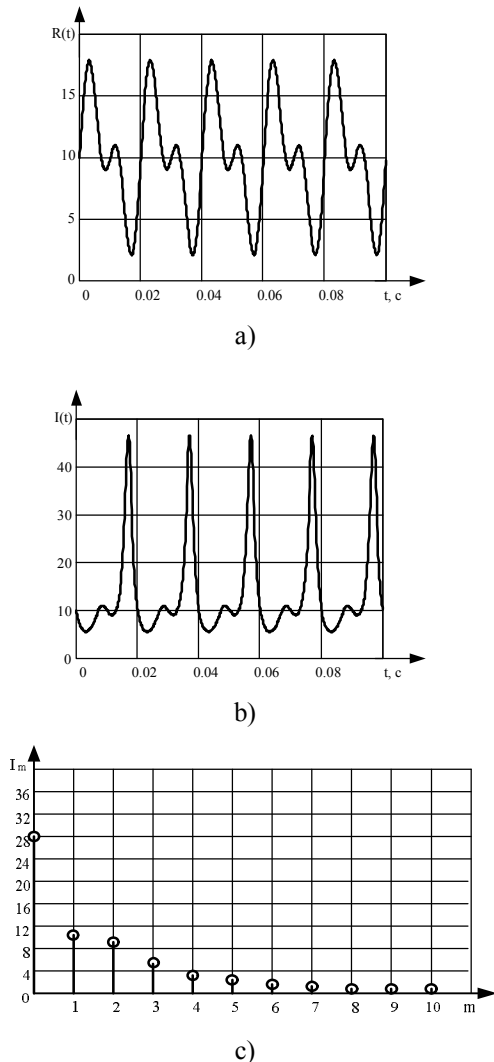


Рисунок 1 – Кривые изменения сопротивления, тока во времени (а, б), спектр тока (с)

При определении конкретных целей, например, тока  $I(t)$  при известном  $R(t)$ , имеет место зависимость

$$I(t) = \frac{U(t)}{R(t)} = \frac{U}{R_0 + \sum_0^{i=2} R_i}. \quad (4)$$

При определении  $R(t)$  – его идентификации – будем иметь другой результат:

$$R(t) = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U}{I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \cos(m\Omega t - \phi_m)}. \quad (5)$$

Как следует из примера, налицо более сложная, чем умножение, операция над рядами – их деление. В данном случае частное

$$\frac{1}{I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \cos(m\Omega t - \phi_m)} = G(t) \quad (6)$$

представляет собой мгновенное значение проводимости цепи – новый ряд с таким же порядком гармонических, что и ряд, аппроксимирующий  $I(t)$ .

Переходя в плоскость энергопараметров, например, определения мгновенной мощности на активном сопротивлении, будем иметь

$$P(t)_R = R(t)I^2(t) = \left( R_0 + \sum_0^{i=2} R_i \right) \left( I_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \cos(m\Omega t - \phi_m) \right)^2. \quad (7)$$

Из приведенного выражения наиболее интересным является произведение переменной составляющей сопротивления на квадрат переменной составляющей тока. Очевидно, что по существу это произведение трех рядов.

Показателен пример, касающийся нелинейности с насыщающейся индуктивностью. Пусть зависимость индуктивности от тока [13, 15] имеет вид

$$L(I) = a_1 I + a_3 I^3 + a_5 I^5 + \dots + (a_n) I^n, \quad (8)$$

а ток представлен в общей форме ряда Фурье:

$$I(t) = \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \cos(m\Omega t - \phi_m). \quad (9)$$

Очевидно, что для получения зависимости  $L(t)$  необходимо зависимость  $I(t)$  подставить в выражение для  $L(I)$ , т.е. ряд, описывающий  $I(t)$ , необходимо последовательно возводить в третью, пятую и т.п. степень:

$$L(t) = a_1 I(t) + a_3 I^3(t) + a_5 I^5(t) + \dots + (a_n) I(t)^n. \quad (9)$$

Для других элементов электрической цепи следует воспользоваться общей зависимостью для мощности  $P(t) = U(t)I(t)$ .

Для энергетического баланса мощность индуктивности следует представить в форме, если учесть, что напряжение

$$U_L(t) = \frac{d}{dt}(L(t)I(t));$$

$$P_L(t) = U_L(t)I(t) = \frac{d}{dt}(L(t)I(t))I(t) = \frac{dL(t)}{dt}I^2(t) + \frac{dI(t)}{dt}L(t)I(t). \quad (10)$$

Из выражения следует такой вывод: представление энергетических зависимостей в форме выражений мгновенной мощности, уравнений электрического равновесия в цепях с нелинейностями с использованием рядов Фурье отличается сложностью из-за частотных преобразований при выполнении операций (их умножения, деления, возведения в степень).

Нетрудно заметить, что как при умножении рядов, так и при их делении при идентификации нелинейностей получаем в результате новый результирующий ряд с определенным гармоническим составом. Это касается ряда, определяющего гармонический состав мгновенной мощности  $\sum_0^{\infty} P_k(t)$  (при умножении  $U(t)$  на  $I(t)$ ); умножении ряда, определяющего ток  $I(t) = I_0 + \sum_0^{\infty} I_m(t)$ , на ряд, аппроксимирующий зависимость сопротивления во времени  $R(t)$  (в случае идентификации параметров анализируемой нелинейности).

Рассмотренный пример можно соответствующим образом усложнить, представляя напряжение питания в форме ряда  $U(t) = \sum_0^{\infty} U_n(t)$ . Тогда уравнение электрического равновесия можно записать так:  $\sum_0^{\infty} U_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t) \sum_0^{\infty} I_m(t)$ , что в условиях примера, приведенного выше, также означает произведение рядов. Вследствие этого можно рассматривать разные подходы при формировании задач с нелинейными преобразованиями рядов:

- путем определения произведения двух рядов с известным гармоническим составом и гармониками, но неизвестными коэффициентами ряда в получаемом результате;
- путем определения произведения двух рядов, причем один из сомножителей – ряд с известным гармоническим составом, но с неизвестными коэффициентами, другой сомножитель с известными коэффициентами и гармоническим составом при результате – известном ряде.

При решении конкретных электротехнических и электромеханических задач определение тех или иных показателей и режимов осуществляется посредством реализации указанных математических операций над зависимостями, представляющими собой математическое описание физических процессов.

Указанные операции могут быть также реализованы с помощью вычислительной техники при использовании известных прикладных программных средств. При этом, однако, теряется часть промежуточной информации, необходимой при решении конкретной задачи. Такая информация нужна не только как фактический материал, характеризующий этап исследования, но, и это весьма важно,

может быть использована при разработке приборного или иного оборудования для исследования процессов. Иными словами, важно знание механизмов выполнения элементарных математических операций.

Анализ литературных источников показывает на отсутствие универсального математического аппарата по умножению гармонических рядов, их делению, возведению в степень и др. [20, 21]. В отличие от операций сложения и вычитания, при названных выше операциях наблюдаются частотные преобразования, заключающиеся в том, что в результате происходит изменение частот выходных, результирующих сигналов по отношению к входным. Это легко видеть, например, из произведения гармонических функций с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Результатом произведения их являются гармонические функции с частотами  $\Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2$  и  $\Omega_4 = \Omega_1 - \Omega_2$ :

$$\cos \Omega_1 t \cos \Omega_2 t = \cos(\Omega_1 - \Omega_2)t + \cos(\Omega_1 + \Omega_2)t. \quad (11)$$

Для получения обобщающих результатов рассмотрим произведение двух функций  $U(t)$  и  $I(t)$ , аппроксимированных рядами Фурье:

$$U(t) = \sum_{m=1}^{m=\infty} U_n \cos(n\Omega t - \phi_n); \quad (12)$$

$$I(t) = \sum_{m=1}^{m=\infty} I_m \cos(m\Omega t - \phi_m),$$

где  $n, m$  – номер гармонических в соответствующем выражении;  $\phi_n, \phi_m$  – фазовые углы гармоник.

Здесь и далее используем обозначения  $U(t)$ ,  $I(t)$  как символы некоторых функций  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  без конкретной их привязки к напряжению и току. Поэтому получаемые результаты могут быть использованы для любых зависимостей, иных сред и т.п.

Путем несложных преобразований ряды, аппроксимирующие  $U(t)$  и  $I(t)$ , представим в форме сумм – рядов с синусными и косинусными компонентами:

$$\sum_0^{\infty} U_n(t) = \sum_0^{\infty} U_{na} + \sum_0^{\infty} U_{nb}; \quad (13)$$

$$\sum_0^{\infty} I_m(t) = \sum_0^{\infty} I_{ma} + \sum_0^{\infty} I_{mb},$$

где индексами  $na$  и  $ma$  обозначены косинусные компоненты гармоник напряжения  $U_{na}$  и тока  $I_{ma}$ , индексами  $nb$  и  $mb$  – соответствующие синусные компоненты. С учетом отмеченного, произведение рядов двух функций примет вид суммы четырех составляющих – произведений частичных рядов, два из которых включают произведения одноименных компонент, а два – разноименных:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \sum_{m=0}^{\infty} I_m(t) = \sum_{na} U_{na} \sum_{ma} I_{ma} + \sum_{nb} U_{nb} \sum_{mb} I_{mb} + \sum_{na} U_{na} \sum_{mb} I_{mb} + \sum_{nb} U_{nb} \sum_{ma} I_{ma} \quad (14)$$

Под термином одноименные понимаются произведения двух рядов с функциями косинуса (индекс *a*) или синуса (индекс *b*), а разноименные – когда умножаются ряды с разными индексами гармонических функций. Результатом произведения в конечном итоге является новый ряд с косинусными и синусными компонентами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \sum_{m=0}^{\infty} I_m(t) = \sum_{K=0}^{\infty} P_{ka} + \sum_{K=0}^{\infty} P_{kb}, \quad (15)$$

где  $k = m \pm n$  – порядок гармонических произведения.

В практических расчетах обычно ограничиваются конечным числом гармоник рядов, аппроксимирующих каждую из функций. Пусть для функции  $U(t)$   $n_{max} = N$ , а для  $I(t)$   $m_{max} = M$ , причем эти значения могут быть не равными друг другу. Тогда для произведения рядов можно записать [10, 13, 16, 17]:

$$\sum_{n=0}^N U_n(t) \sum_{m=0}^M I_m(t) = \sum_{K=0}^{M+N} P_{ka} + \sum_{K=0}^{M+N} P_{kb} \quad (16)$$

По всем формальным признакам подход к умножению рядов в приведенных компонентах общего произведения один и тот же, независимо от того, умножаются косинусные, синусные или же синусно-косинусные составляющие. Отличием является лишь одно: при умножении косинусных составляющих на косинусные или синусных на синусные (умножение одноименных составляющих) получаются только косинусные компоненты, в то время как при умножении разноименных компонент получается результат только с синусными составляющими.

Для наглядности и упрощения расчета и анализа получаемых результатов в табл. 1 приведен алгоритм умножения отдельно взятых произведений из (14). При этом по горизонтали располагаются номера гармоник с индексом *m*, а по вертикали – с индексом *n*. На пересечении ряда и столбца таблицы получаются порядковые номера перемножаемых гармонических составляющих. Сумма и разность порядковых номеров определяет, как отмечено выше, номер гармонических произведения. Так, например, при  $m_a = 2$  и  $n_a = 7$  гармоники произведения будут  $n_a + m_a = 7 + 2 = 9$  и  $n_a - m_a = 7 - 2 = 5$ .

Таблица 1 – Таблица соответствия сомножителей

		$n_a$						$n_b$					
		0	1	2	→	6	7	0	1	2	→	6	7
$m_a$	0	0·0	0·1	0·2	...	0·6	0·7	0·0	0·1	0·2	...	0·6	0·7
	1	1·0	1·1	1·2	...	1·6	1·7	1·0	1·1	1·2	...	1·6	1·7
	2	2·0	2·1	2·2	...	2·6	2·7	2·0	2·1	2·2	...	2·6	2·7
	↓	⋮	⋮	⋮	$I_{ma} \cdot U_{na} = P_{ka} \cos k\Omega t$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$I_{mb} \cdot U_{nb} = P_{kb} \sin k\Omega t$	⋮	⋮
	6	6·0	6·1	6·2	...	6·6	6·7	6·0	6·1	6·2	...	6·6	6·7
	7	7·0	7·1	7·2	...	7·6	7·7	7·0	7·1	7·2	...	7·6	7·7
	↓	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m_b$	0	0·0	0·1	0·2	...	0·6	0·7	0·0	0·1	0·2	...	0·6	0·7
	1	1·0	1·1	1·2	...	1·6	1·7	1·0	1·1	1·2	...	1·6	1·7
	2	2·0	2·1	2·2	...	2·6	2·7	2·0	2·1	2·2	...	2·6	2·7
	↓	⋮	⋮	⋮	$I_{mb} \cdot U_{na} = P_{kb} \sin k\Omega t$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$I_{ma} \cdot U_{nb} = P_{ka} \cos k\Omega t$	⋮	⋮
	6	6·0	6·1	6·2	...	6·6	6·7	6·0	6·1	6·2	...	6·6	6·7
	7	7·0	7·1	7·2	...	7·6	7·7	7·0	7·1	7·2	...	7·6	7·7
	↓	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Наклонные прямые в табл. 1 пересекают клетки с номерами таких гармоник, произведения которых (1·0; 2·1; ...6·7) дают результирующие гармоники выходного сигнала с заданным значением *k* ( $k = 1$ ). Аналогичные результаты получаются при умноже-

нии любых компонент, представленных в квадрантах 1–4 (табл. 1), в которой для иллюстрации представлены произведения амплитуд гармонических  $U_{na} I_{ma}; U_{nb} I_{mb}; U_{na} I_{mb}; U_{nb} I_{ma}$ .

В табл. 2 для заданных значений гармонических

произведения приведены номера гармоник сомножителей, обеспечивающих после выполнения арифметической операции искомую гармонику результата – произведения двух рядов. Так, для  $k = 5$  необходимо умножение таких гармоник  $U(t)$  и  $I(t)$ :  $3 \times 2; 2 \times 3; 4 \times 1; 1 \times 4; 5 \times 0; 0 \times 5; 6 \times 1; 1 \times 6; 7 \times 2; 2 \times 7$ . Приведенные таблицы соответствуют произведению рядов с конечным числом составляющих  $n = m = 7$ .

Каждое из формальных произведений означает произведение двух гармонических функций, которое в конечном итоге дает две составляющие разных частот, равных сумме и разности частот исходных гармонических функций. Исключением

является лишь произведение постоянной составляющей (частота равна 0) на функцию синуса или косинуса. С учетом сказанного очевидно, что порядок гармонических составляющих мощности определяется, исходя из простейшего выражения  $k = m \pm n$ ; это в конечном итоге означает, что результат умножения двух рядов – новый тригонометрический ряд, коэффициенты которого, по существу, не известны, но могут быть определены с помощью таблицы. С этой целью необходимо отдельно выписать те составляющие из табл. 1, которые при умножении компонент дадут требуемый номер гармоники произведения.

Таблица 2 – Таблица компонент рядов  $U(t)$  и  $I(t)$

Гармоники произведения (k)	Номера гармоник сомножителей							
	0·0	1;1	2;2	3;3	4;4	5;5	6;6	7;7
0	0·0							
1		1·0 0·1	2·1 1·2	3·2 2·3	4·3 3·4	5·4 4·5	6·5 5·6	7·6 6·7
2		1·1	2·0 0·2	3·1 1·3	4·2 2·4	5·3 3·5	6·4 4·6	7·5 5·7
3			2·1 1·2	3·0 0·3	4·1 1·4	5·2 2·5	6·3 3·6	7·4 4·7
4			2·2	3·1 1·3	4·0 0·4	5·1 1·5	6·2 2·6	7·3 3·7
5				3·2 2·3	4·1 1·4	5·0 0·5	6·1 1·6	7·2 2·7
6				3·3	4·2 2·4	5·1 1·5	6·0 0·6	7·1 1·7
7					4·3 3·4	5·2 2·5	6·1 1·6	7·0 0·7
8					4·4	5·3 3·5	6·2 2·6	7·1 1·7
9						5·4 4·5	6·3 3·6	7·2 2·7
10						5·5	6·4 4·6	7·3 3·7
11							6·5 5·6	7·4 4·7
12							6·6	7·5 5·7
13								7·6 6·7
14								7·7

Для гармоник мощности третьего порядка имеем такие произведения для  $K_v = 3 \times 0$  и  $0 \times 3; 2 \times 1$  и  $1 \times 2; 4 \times 1$  и  $1 \times 4; 5 \times 2$  и  $2 \times 5; 6 \times 3$  и  $3 \times 6; 7 \times 4$  и  $4 \times 7$ .

Здесь отмечаем, что представленный перечень относится только к первой части выражения, определяющего косинусные составляющие  $U_{na}I_{ma}$  из зависимости:

$$P_{K_v} = \sum_{K_v=3=m_j \pm n_j}^{M+N} U_{na} I_{ma} - \sum_{K_v=3=m_j \pm n_j}^{M+N} U_{nb} I_{mb} \quad (17)$$

Исходя из сказанного, запишем общие выражения для коэффициентов ряда, описывающего постоянную составляющую, синусную и косинусные составляющие ряда мгновенной мощности, полученной в результате умножения рядов напряжения и тока:

$$\begin{aligned}
 P_{K_v} &= \sum_{n_i-m_j=0}^{N=M} U_{na\ i} I_{ma\ j} - \sum_{n_i-m_j=0}^{N=M} U_{nb\ i} I_{mb\ j}; \\
 P_{a_{K_v}} &= \sum_{n_i \pm m_j = K_v}^{2N-K_v+1} U_{na\ i} I_{ma\ j} - \sum_{n_i \pm m_j = K_v}^{2N-K_v+1} U_{nb\ i} I_{mb\ j}; \quad (18) \\
 P_{b_{K_v}} &= \sum_{n_i \pm m_j = K_v}^{2N-K_v+1} U_{na\ i} I_{mb\ j} - \sum_{n_i \pm m_j = K_v}^{2N-K_v+1} U_{nb\ i} I_{ma\ j}.
 \end{aligned}$$

Индекс последнего члена в полученном ряду, как видно из табл. 2, зависит от порядкового номера гармоники мгновенной мощности, и он равен  $2N - K_v + 1$ : для первой гармоники – это  $2N = 14$ , для третьей, соответственно, 12, а для тринадцатой – 4.

Проверка работоспособности приведённого математического аппарата выполнена в соответствии с приведённым выше примером.

При изменении сопротивления по указанной цепи протекает ток, который представляется в форме гармонического ряда:

$$I(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{m=M} (I_{a_m} \cos(m\Omega t) + I_{b_m} \sin(m\Omega t)). \quad (19)$$

Коэффициенты ряда определяются согласно зависимостям

$$\begin{aligned}
 I_0 &= (1/T) \int_0^T I(t) dt; \\
 I_{a_m} &= (2/T) \int_0^T I(t) \cos(m\Omega t) dt; \quad (20) \\
 I_{b_m} &= (2/T) \int_0^T I(t) \sin(m\Omega t) dt,
 \end{aligned}$$

где  $T$  – период повторяемости процессов. Ограничиваясь конечным числом гармонических составляющих, например  $m=14$ , получим зависимость для  $I(t)$  в форме

$$\begin{aligned}
 I(t) = & I_0 + I_{a_1} \cos(\Omega t) + I_{b_1} \sin(\Omega t) + I_{a_2} \cos(2\Omega t) + I_{b_2} \sin(2\Omega t) + \\
 & I_{a_3} \cos(3\Omega t) + I_{b_3} \sin(3\Omega t) + I_{a_4} \cos(4\Omega t) + I_{b_4} \sin(4\Omega t) + \\
 & + I_{a_5} \cos(5\Omega t) + I_{b_5} \sin(5\Omega t) + I_{a_6} \cos(6\Omega t) + I_{b_6} \sin(6\Omega t) + \\
 & + I_{a_6} \cos(6\Omega t) + I_{b_7} \sin(7\Omega t) + I_{a_8} \cos(8\Omega t) + I_{b_8} \sin(8\Omega t) + \\
 & + I_{a_9} \cos(9\Omega t) + I_{b_9} \sin(9\Omega t) + I_{a_{10}} \cos(10\Omega t) + I_{b_{10}} \sin(10\Omega t) + \\
 & + I_{a_{11}} \cos(11\Omega t) + I_{b_{11}} \sin(11\Omega t) + I_{a_{12}} \cos(12\Omega t) + I_{b_{12}} \sin(12\Omega t) + \\
 & + I_{a_{13}} \cos(13\Omega t) + I_{b_{13}} \sin(13\Omega t) + I_{a_{14}} \cos(14\Omega t) + I_{b_{14}} \sin(14\Omega t).
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов при синусных и косинусных составляющих приведены в табл. 3. Постоянная составляющая  $I_0 = 14,045$  А.

После перемножение ряда, описывающего ток, и ряда, описывающего  $R(t)$ , получим уравнение баланса напряжений в форме

$$U = \sum_{i=0}^{i=3} R_i(t) \sum_{m=0}^N I_m(t) = \sum_{k=0}^{N+3} P_k(t). \quad (21)$$

Таблица 3 – Значение гармоник в кривой тока

$m$	$I_{am}$ А	$I_{bm}$ А	$m$	$I_{am}$ А	$I_{bm}$ А
1	4,141	-9,479	8	0,09	-0,501
2	-2,588	-8,379	9	-0,227	-0,232
3	-4,904	-0,752	10	-0,201	0,032
4	-2,497	2,031	11	-0,058	0,115
5	0,269	2,028	12	0,038	0,072
6	1,101	0,634	13	0,051	$6,63 \cdot 10^{-3}$
7	0,736	-0,352	14	0,022	-0,024

Результат перемножения – новый ряд, содержащий синусные и косинусные составляющие, а также постоянную – среднее значение результирующего гармонического ряда. Получение коэффициентов при синусных и косинусных составляющих вручную – достаточно сложная задача даже при сравнительно небольшом количестве анализируемых гармоник тока, которая занимает большое время, и в то же время получаемый конечный результат имеет невысокую точность. В этой связи целесообразно воспользоваться специализированными программными продуктами, например Maple, Mathematica или Mathcad [22, 23].

Тогда задача заключается в составлении системы уравнений из результата перемножения рядов, т.е., по существу, из ряда  $\sum_0^{2M} p_k(t)$ . Основанием для

составления зависимостей, как базы для системы уравнений для определения трех неизвестных ( $R_0, \alpha, \beta$ ), являются следующие условия:

– среднее значение произведения двух рядов на интервале повторяемости процессов, равное напряжению источника,

$$\frac{1}{T} \int_0^T R(t) I(t) dt = I_0 R_0 + \frac{I_{1a} \alpha}{2} + \frac{I_{2b} \beta}{2} = U;$$

– значение напряжения питания в момент времени  $t = 0$  ( $\Omega t = 0$ )

$$R_0 \left( I_0 + \sum_1^M I_{am} \right) = U;$$

– значение напряжения питания в момент времени  $t = 0,005$  с ( $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ )

$$(R_0 + \alpha) \left( I_0 + \sum_1^M I_{bm} \right) = U.$$

С учетом указанных положений, получаем систему уравнений для определения искомых параметров:



$$I_0 R_0 + \frac{I_{1b} \alpha}{2} + \frac{I_{2b} \beta}{2} = U;$$

$$(R_0 + \alpha) \left( I_0 + \sum_1^M I_{bm} \right) = U.$$

$$R_0 \left( I_0 + \sum_1^M I_{am} \right) = U;$$

Система составлена для случая, когда число гармоник тока равно 14.

Решение системы дает такой результат:

$$R_0 = \frac{U}{I_0 + I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} + I_{a4} + I_{a5} + I_{a6} + I_{a7} + I_{a8} + I_{a9} + I_{a10} + I_{a11} + I_{a12} + I_{a13} + I_{a14}};$$

$$\alpha = \frac{2(I_{b2}I_{b5} - I_{b2}I_{b7} + I_{b2}I_{b13} + I_{b2}I_{b9} - I_{b2}I_{b3} + 2I_{b2}I_{a8} + I_{b2}I_{b1} + (I_0 + I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} + I_{a4} + I_{a5} + I_{a6} + I_{a7} + I_{a8} + I_{a9} + I_{a10} + I_{a11} + I_{a12} + I_{a13} + I_{a14})(-2I_0I_{b2} + 2I_{a2}I_{b2} - 2I_{a4}I_{b2} + 2I_{b2}I_{a12} + I_{b2}I_{a5} + 2I_{b2}I_{a4} + I_{b2}I_{a3} + I_{b2}I_{a1} + I_{b2}I_{a13} + I_{b2}I_{a9} + I_{b2}I_{a7})U}{(I_0 + I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} + I_{a4} + I_{a5} + I_{a6} + I_{a7} + I_{a8} + I_{a9} + I_{a10} + I_{a11} + I_{a12} + I_{a13} + I_{a14})(-2I_0I_{b2} + 2I_{a2}I_{b2} - 2I_{a4}I_{b2} + 2I_{a6}I_{b2} - 2I_{a8}I_{b2} + 2I_{a10}I_{b2} + 2I_{a11}I_{b2} - 2I_{a12}I_{b2} + 2I_{a14}I_{b2} + 2I_{b2}I_{b3} - 2I_{a2}I_{b5} + 2I_{a2}I_{b7} - 2I_{b2}I_{b9} - 2I_{b2}I_{b13} + 2I_{b2}I_{a12} + I_{b2}I_{a5} + 2I_{b2}I_{a4} + I_{b2}I_{a3} + I_{b2}I_{a1} + I_{b2}I_{a13} + I_{b2}I_{a9} + I_{b2}I_{a7})U} + 2I_{a6}I_{b2} - 2I_{a8}I_{b2} + 2I_{a10}I_{b2} + 2I_{a11}I_{b2} - 2I_{a12}I_{b2} + 2I_{a14}I_{b2} + 2I_{b2}I_{b3} - 2I_{a2}I_{b5} + 2I_{a2}I_{b7} - 2I_{b2}I_{b9} - 2I_{b2}I_{b13}};$$

$$\beta = (2U \left( \frac{1}{2} I_{b1}^2 + I_{a4}^2 - I_{a14}^2 + I_{a8}^2 - I_{a10}^2 - I_{a2}^2 - I_{a6}^2 + I_{a12}^2 - I_{a11}^2 + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a9} + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a1} + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a3} + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a5} + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a7} + (\frac{1}{2} I_{b1} + I_{a1} + I_{a3} + I_{a5} + I_{a7} + I_{a9} + I_{a13}) I_{b9} + (I_0 + \frac{1}{2} I_{b1}) I_{a13} + (-\frac{1}{2} I_{b1} - I_{a1} - I_{a3} - I_{a5} - I_{a7} - I_{a9} - I_{a13}) I_{b7} + (-\frac{1}{2} I_{b1} - I_{a1} - I_{a3} - I_{a5} - I_{a7} - I_{a9} - I_{a13}) I_{b3} + (\frac{1}{2} I_{b1} + I_{a1} + I_{a3} + I_{a5} + I_{a7} + I_{a9} + I_{a13}) I_{b5} + (\frac{1}{2} I_{b1} + I_{a1} + I_{a3} + I_{a5} + I_{a7} + I_{a9} + I_{a13}) I_{b13} + (I_0 + I_{a5} + I_{a1} + I_{b13} + I_{a9} + I_{b9} - I_{b3} + I_{b5} + I_{a13} + I_{b1} - I_{b7} + I_{a7} + I_{a3}) I_{a8} + (I_0 + I_{a5} + I_{a1} + 2I_{a8} + I_{a9} + I_{b9} - I_{b3} + I_{b13} + I_{a13} + I_{b1} - I_{b7} + I_{b5} + I_{a7} + I_{a3}) I_{a4} + (I_0 + I_{a5} + I_{a1} + 2I_{a8} + I_{a9} + I_{b9} - I_{b3} + 2I_{a4} + I_{a13} + I_{b1} - I_{b7} + I_{b13} + I_{b5} + I_{a7} + I_{a3}) I_{a12} + (-I_{a1} - I_{a3} - I_{b7} + I_0 - I_{a9} - I_{a7} + I_{b13} - I_{a13} + I_{b9} - I_{a5} + I_{b5} - I_{b3}) I_{a6} + (-I_{a1} - I_{a3} - 2I_{a6} + I_0 - I_{a9} - I_{a7} - I_{b7} - I_{a13} + I_{b9} - I_{a5} + I_{b13} + I_{b5} - I_{b3}) I_{a2} + (-I_{a1} - I_{a3} - 2I_{a2} + I_0 - I_{a9} - I_{a7} - 2I_{a6} - I_{a13} + I_{b9} - I_{a5} - I_{b7} + I_{b13} + I_{b5} - I_{b3}) I_{a14} + (-I_{a1} - I_{a3} - 2I_{a2} + I_0 - I_{a9} - 2I_{a14} - 2I_{a6} - I_{a13} + I_{b9} - I_{a7} - I_{b7} + I_{b13} + I_{b5} - I_{a5} - I_{b3}) I_{a11} + (I_{b2}(-I_{a11} - I_{a2} + I_{a8} - I_{a10} + I_{a12} - I_{a14} + I_{a4} - I_{a6} + I_{b13} - I_{b3} + I_{b9} + I_{b5} + I_0 - I_{b7})) (I_0 + I_{a1} + I_{a2} + I_{a3} + I_{a4} + I_{a5} + I_{a6} + I_{a7} + I_{a8} + I_{a9} + I_{a10} + I_{a11} + I_{a12} + I_{a13} + I_{a14}) \right) /$$

При решении системы уравнений использовался программный продукт Maple. В качестве методов решения системы уравнений использовались методы Крамера и Гаусса [22, 23].

В табл. 4 представлены значения параметров при различном количестве гармоник тока в системе уравнений.

Таблица 4 – Расчетные значения параметров для разного числа значащих гармоник тока

Количество гармоник $k$	Коэффициенты		
	$\alpha$	$\beta$	$R_0$
5	1,634328406	13,88065166	11,81195370
7	5,24624221	2,73420543	9,70591090
10	4,78627918	4,35821253	10,0351229
14	5,04509914	3,88743211	9,98203234

Как следует из полученных данных, приемлемые результаты идентификации параметров сопротивления имеют место при числе гармонических, равно достаточно большому  $\nu$  (в нашем случае  $k \geq 10$ ).

Решение обратной задачи – определения зависимости тока  $I(t)$  при известных зависимостях напряжения и сопротивления во времени – представляет собой случай деления напряжения на сопротивление  $U(t)R(t)^{-1}$ , что соответствует ранее представленному равенству  $U(t) = I(t)R(t)$ , из которого следует, что в случае, если  $U(t)$  – ряд и сопротивление – ряд, то  $I(t)$  – искомый ряд, гармонический состав которого должен отвечать следующим условиям. Уравнение электрического равновесия означает равенство  $i$ -той гармоники напряжения левой части уравнения значению  $i$ -той гармоники – правой. В простейшем представлении это равенство постоянного значения  $U(t)$  постоянной составляющей произведения  $I(t)R(t)$ . Аналогичное соответствие должно соблюдаться для каждой из гармоник. Это означает, что в результате умножения рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(t) \sum_{r=0}^{\infty} R_r(t)$  получаем ряд векторных уравнений. В левой части каждой из них имеем вектор – гармонику соответствующего порядка, а в правой – векторную сумму, образованную гармониками тока и сопротивления в ходе их частотных преобразований.

Равенство вектора гармоники левой части по амплитуде и фазе равно результирующему вектору правой части, возможно, в случае, если анализ осуществляется для бесконечного числа гармоник тока. В случае, если ограничиваемся при анализе числом гармонических  $M$ , указанным выше, равенства векторов может и не быть. В таком случае вопрос решается не для равенств, а для неравенств векторов. В конечном итоге определение амплитуд гармоник искомой величины будет осуществляться с ошибкой, величина которой тем больше, чем меньше число  $M$  принимаемых к анализу гармонических. Решение системы уравнений в таких случаях осуществляется с предварительным заданием области изменения допустимых ошибок.

**ВЫВОДЫ.** В задачах определения энергетических показателей в сетях с напряжением и током несинусоидальной формы, исследования режимов работы устройств и систем с нелинейностями имеют место операции умножения, деления, возведения в степень двух и более сигналов, аппроксимированных тригонометрическими рядами или другими, в том числе степенными зависимостями. Использование рядов Фурье как математического описания сложных периодических и непериодических сигналов нашло преимущественное распространение при решении указанных выше задач.

В настоящее время отсутствует простой аналитический аппарат для анализа нелинейных преобра-

зований с рядами Фурье. Следует отметить, что исследователю сейчас доступны современные компьютерные технологии, реализующие указанные преобразования с использованием хорошо зарекомендовавшихся при обработке сигналов методов непрерывной и дискретной свертки. При этом важно понимание особенностей нелинейных преобразований для исследования процессов и особенностей формирования составляющих произведений рядов и их результатов как частотных преобразований.

В электротехнике сформировался ряд направлений, где наиболее востребованные операции умножения и деления сигналов, формализованных рядами Фурье:

- определение энергетических показателей сигналов с несинусоидальными токами и напряжениями;
- исследование энергетических режимов в цепях с нелинейностями при заданных параметрах источника питания и характеристиками нелинейности;
- идентификация параметров нелинейности при известных значениях напряжения питания и тока в цепи.

Выполненные исследования в полном объеме можно использовать при определении энергетических показателей по значениям мгновенной мощности с выделением постоянной (активной), знакопеременных активной и реактивной составляющих в пространстве канонических компонент, псевдоактивной и псевдореактивной составляющих в пространстве неканонических компонент, знакопеременных неканонических составляющих. Учет названных составляющих, выяснение природы некоторых из них и, прежде всего, псевдоактивной и псевдореактивной компонент позволит завершить затянувшуюся дискуссию по проблематике неактивных составляющих мощности несинусоидальных сигналов.

Энергетические задачи с несинусоидальными сигналами можно решать с использованием законов Кирхгофа в форме уравнений электрического равновесия с представлением физических величин – напряжения, тока, соответствующих составляющих нагрузки в форме рядов Фурье с последующим производством операций, вытекающих из взаимосвязей уравнений электрического равновесия, и задач, ставящихся перед исследователем: путем умножения рядов при определении мощности; деления напряжения на ток – при определении ряда, описывающего меняющееся во времени сопротивление нагрузки; и т.п.

В тех случаях, когда определение искомых параметров невозможно, исходя из условий, вытекающих из законов Кирхгофа, необходим переход к решению упомянутых выше задач энергетическим методом путем построения систем идентификационных уравнений на базе зависимостей энергетического баланса на гармониках мгновенной мощности, получаемых из произведений двух или более рядов Фурье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. IEEE Std 1459–2010. Definitions for the measurements of electric power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced, or unbalanced conditions.

– March, 2010 // IEEE Standart 1459. – 40 p.

2. ГОСТ 1310927. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. 18.06.99. – Минск: Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 1999. – 30 с.

3. Агунов М.В., Агунов А.В., Вербова Н.М. Новый подход к измерению электрической мощности // Промышленная энергетика. – 2004. – Вып. 2. – С. 30–33.

4. Зыкин Ф.А., Каханович В.С. Измерение и учет электрической энергии. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 104 с.

5. Родькин Д.И., Бялобржеский А.В., Ломонос А.И. Показатели энергопроцессов в сети с полигармоническими напряжениями и токами // Электротехника. – 2004. – Вып. 6. – С. 37–42.

6. Волошко А.В., Филянин Д.В. Влияние качества электроэнергии на точность показаний электросчетчиков: обзор исследований // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського: наукові праці КрНУ. – Кременчук: КрНУ, 2014. – Вип. 4/2014 (87). – С. 38–43.

7. Бабак В.П., Хандрецький В.С., Шрафед Е. Обробка сигналів. – К.: Либідь, 1996. – 389 с.

8. Сидоренко В.М., Мамчур Д.Г., Родькин Д.И., Чорний О.П. Автоматизация розрахунку складових миттєвої потужності // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Кременчук: КДПУ, 2004. – Вып. 6/2004 (29). – С. 18–24.

9. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning. – New York: Wiley, 2007. – 380 p.

10. Родькин Д.И. Баланс составляющих мгновенной мощности полигармонических сигналов // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КДПУ, 2007. – Вип. 3/2007 (44), част. 1. – С. 66–77.

11. Родькин Д.И. Миттєва потужність трифазного двигунного навантаження з полігармонічними напругою та струмом // Електроінформ. – 2007. – Вип. 4. – С. 10–13.

12. Родькин Д.И. О несоответствии некоторых положений теории энергопроцессов теореме Телледжена // Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – Вып. 28. – С. 71–79.

13. Загирняк М.В., Родькин Д.И., Ромашихин Ю.В., Черный А.П. Энергетический метод идентификации параметров асинхронных двигателей: моногр. – Кременчук: ЧП Щербатых, 2013. – 163 с.

14. Родькин Д.И., Ромашихин Ю.В. Энергетический метод идентификации электромеханических устройств и систем // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. – Минск, 2011. – Вып. 3. – С. 10–20.

15. Родькин Д.И., Мосюндз Д.А. Энергетический метод в задачах исследования объектов с нелинейными // Електромеханічні і енергозберігаючі системи: щоквартальний науково-виробничий журнал. – Кременчук: КрНУ, 2014. – Вип. 3/2014 (27). – С. 20–26.

16. Загирняк М.В., Родькин Д.И., Черный А.П. Направления развития теории мгновенной мощности и ее применение в задачах электромеханики // Міжнар. наук.-техн. конф. «Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика». – Одеса, 2011. – С. 347–354.

17. Родькин Д.И., Ромашихин Ю.В. Мгновенная мощность нелинейных элементов электрической цепи // Сборник научных трудов Днепродзержинского государственного технического университета. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2007. – Вип. 3/2007 (26). – С. 507–512.

18. Родькин Д.И., Огарь В.А. Возможность и эффективность метода мгновенной мощности в идентификационных задачах // Науково-прикладний журнал «Технічна електродинаміка». – 2008. – Київ. – Част. 1. – С. 30–32.

19. Родькин Д.И., Ромашихин Ю.В., Калинин А.П. Эффективность метода энергодиагностики параметров двигателей переменного тока // Электроприводы переменного тока. Труды международной 14 НТК. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2007. – С. 273–278.

20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. – М.: Наука, 1970. – 794 с.

21. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 348 с.

22. Алексеев Е.Р., Чесноков О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.

23. Дьяков В.П. Maple в математике, физике и образовании. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.

#### NONLINEAR TRANSFORMATIONS WITH FOURIER SERIES AS APPLIED TO ELECTROTECHNICAL PROBLEMS

**D. Rodkin, V. Chenchevoy, O. Kobilskaya**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

ul. Pervomayskaya, 20, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: vladchen.86@gmail.com, leca91@ya.ru

In recent years, develops the mathematical apparatus of reserch electric circuits energy regimes, analysis of energy conversion processes in nonlinearity, electrical equipment parameter identification with using the instantaneous power theory, which is based on signal conversion methods, submitted in the approximation dependences form, in particular Fourier series. As a rule, analyzes the processes which are used in the description of nonlinear operations with Fourier series - their multiplication, division, exponentiation, etc. The complexity of these operations virtually impossible to obtain analytical expressions to describe the final dependencies. . The implementation of these mathematical operations are usually used convolution operation, widely used when dealing with signals in radio engineering. The above

operations are available to researchers in the form of well-known applications of mathematical programs. In electrical problems mentioned above character can use solutions obtained without a full-fledged use of computing resources. In electrical problems mentioned above character can use solutions obtained without a full-fledged use of computing resources. This solves another problem along the way – the study of the mechanism of folding and intermediate results as a starting material for the determination of specific data analyzed processes. The paper focuses on the issues of the results using the series with a finite number of their members.

**Key words:** fourier series, multiplication series, the instantaneous power of electrical signals, parameter identification of nonlinearities.

## REFERENCES

1. IEEE Std 1459–2010 (2010), Definitions for the measurements of electric power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced, or unbalanced conditions, *IEEE Standard 1459*.
2. GOST 1310927 (1999), *Normy kachestva elektricheskoy energii v sistemakh elektrosnabzheniya obshchego naznacheniya* [Quality norm of electrical energy in electric power systems general purpose], Mezhsudarstvennyy sovet po standartizatsii, metrologii i sertifikatsii, Minsk. (in Russian)
3. Agunov, M.V., Agunov, A.V. and Verbova, N.M. (2004), “A new approach to the measurement of electric power”, *Promyshlennaya energetika*, no. 2, pp. 30–33. (in Russian)
4. Zykin, F.A. and Kakhanovich, V.S. (1982), *Izmerenie i uchet elektricheskoy energii* [Measurement and calculation of electrical energy], Energoatomizdat, Moscow (in Russian)
5. Rodkin, D.Y., Byalobrzheskiy, A.V. and Lomonos, A.I. (2004), “Energy processes indicators in the circuit with harmonic voltages and currents”, *Electrotekhnika*, no. 6, pp. 37–42. (in Russian)
6. Voloshko, A.V. and Filyanin, D.V. (2014), “Influence of Quality of electricity on the accuracy featured electric meters: overview of research”, *Visnik Kremenchutskogo natsionalnogo universitetu: naukovyi pratsi KrNU*, Vol. 4, no. 87, pp. 38–43. (in Russian)
7. Babak, V.P., Handretskyi, V.S. and Shrafed, E. (1996), *Obrobka signalov*, [Signal Processing], Lybid, Kyiv. (in Ukrainian)
8. Sidorenko, V.M., Rodkin, D.Y., Chornyi, O.P. and Mamchur, D.G. (2004), “Automation components calculating instantaneous power electrical signals”, *Visnyk Kremenchuckogo derzhavnogo politehnichnogo universytetu*, Vol. 6, no. 29, pp. 18–23. (in Ukrainian)
9. Akagi, H., Watanabe, E. and Aredes, M. (2007), *Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning*, Wiley, New York, USA.
10. Rodkin, D.Y. (2007), “Balance is the instantaneous power polyharmonic signals”, *Visnyk Kremenchutskogo derzhavnogo politehnichnogo universytetu*, Vol. 3, no. 44, pp. 128–137. (in Russian)
11. Rodkin, D.Y. (2007), “Instantaneous power of three phase motor load with poliharmonic voltage and current”, *Elektroinform*, no. 4, pp. 10–13. (in Ukrainian)
12. Rodkin, D.Y. (2010), “On the inconsistency some theory of the energy processes to Telledzhen’s theorem”, *Problemy avtomatuzovanogo elektroprivoda. Teoriya i praktika*, no. 28, pp. 127–135. (in Russian)
13. Zagirnyak, M.V., Rodkin, D.Y., Romashihin, Y. and Chornyi, O.P. (2013), *Energeticheskii metod identifikatsii parametrov asinhronnih dvigateley* [Energy method for induction motors parameter identification], PE Shcherbatyh A.V., Kremenchug. (in Russian)
14. Rodkin, D.Y. and Romashihin, Yu.V. (2011), “Energy method for the electromechanical devices and systems identification”, *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh obyedineniy SNG. Energetika*, Vol. 3, pp. 10–20. (in Russian)
15. Rodkin, D.Y. and Mosyundz, D.A. (2014), “Energy method in problems of facilities with nonlinearities research”, *Elektromehanični i energozberigayuchi sistemy*, Vol. 3, no. 27, pp. 20–26. (in Russian)
16. Zagirnyak, M.V., Rodkin, D.Y., Chornyi, O.P. and Korenkova, T.V. (2011), “Direction of development of the theory of instantaneous power and its application in problems of electrical engineering”, *Mizhnar. nauk.-tekhn. konf. "Problemy avtomatizovanogo elektroprivodu. Teoriya i praktika"* [Problems automated electric. Theory and practice], *Intern. Scientific and Technical. conf.*, Odessa, pp. 347–354. (in Russian)
17. Rodkin, D.Y. and Romashihin, Yu.V. (2007), “Capabilities and efficiency of the method of energy diagnosis for identification problems”, *Sbornik nauchnykh trudov Dnepodzerzhinskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, Vol. 3, no. 26, pp. 507–512. (in Russian)
18. Rodkin, D.Y. and Ogar, V.A. (2008), “Possibility and efficiency of the instantaneous power method in identification problems”, *Naukovo-prikladnyi zhurnal "Tehnična elektrodinamika"*, part 1, pp. 30–32. (in Russian)
19. Rodkin, D.Y., Romashihin, Yu.V. and Kalinov, A.P. (2007), “Efficiency of the parameters of AC motors energy diagnosis method”, *Elektroprivody peremennogo toka*, pp. 273–278. (in Russian)
20. Fichtenholts, G.M. (1970), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus], Nauka, Moscow. (in Russian)
21. Tolstov, G.P. (1980), *Ryady Furiye* [Fourier series], Nauka, Moscow. (in Russian)
22. Alekseev, E.P. and Chesnokov, O.V. (2006), *Reshenie zadach vychislitelnoy matematiki v paketakh Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9*. [Solving problems in computational mathematics of Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9], HT Press, Moscow. (in Russian)
23. Dyakov, V.P. (2004), *Maple v matematike, fizike i obrazovanii* [Maple in mathematics, physics and education], Solon–press, Moscow. (in Russian)

Стаття надійшла 21.02.2015.